詳細解答

STEP II 2004，第 7 題

純數學 • 二分法

> **STEP II 2004，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q7

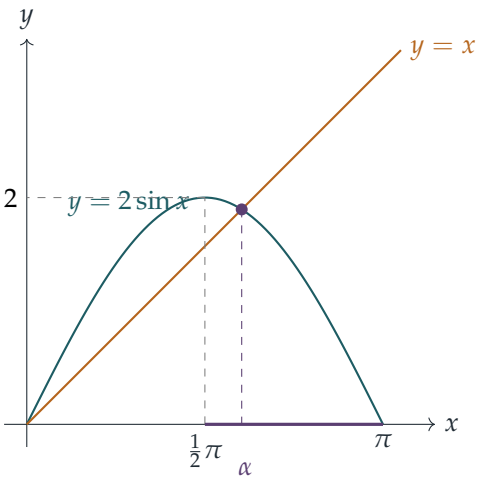
關鍵思路

方程 $2\sin x - x = 0$ 的根（root），就是曲線 $y = 2\sin x$ 與直線 $y = x$ 相交之處，所以圖像部分只涉及一條正弦曲線和一條直線。至於二分法（bisection）的每一步，歸根究底都只問同一個問題：在中點（midpoint）處，$2\sin c$ 比 c 大還是小？半角公式（half-angle formula）可把 $\frac{5}{8}\pi$ 和 $\frac{9}{16}\pi$ 的正弦值化為多重根式，而比較兩個正數的平方，則令計算只需用到題目給出的近似值。

解答

I_0 內恰有一個根

我們有 $f(x) = 0 \iff 2\sin x = x$，所以各根就是 $y = 2\sin x$ 與 $y = x$ 的交點的 x 坐標。



在 $[\frac{1}{2}\pi, \pi]$ 上：

- 在 $x = \frac{1}{2}\pi$ 處，曲線的高度為 2，直線的高度為 $\frac{1}{2}\pi < 2$（因為 $\pi < 4$），所以曲線在直線之上；
- 在 $x = \pi$ 處，曲線的高度為 0，直線的高度為 $\pi > 0$，所以曲線在直線之下；
- 在這個區間（interval）上，曲線 $y = 2\sin x$ 遞減，而直線 $y = x$ 遞增。

兩個圖像都是連續（continuous）的，所以曲線必定在區間內某處穿過直線；又因為一個下降、一個上升，曲線一旦落到直線之下，就不可能再回到直線之上。因此兩者恰好相交一次，即 $\mathrm{f}(x) = 0$ 在 I_0 內恰有一個根 α。用 f 來表達：$\mathrm{f}(\frac{1}{2}\pi) = 2 - \frac{1}{2}\pi > 0$，$\mathrm{f}(\pi) = -\pi < 0$，而且 f 在該區間上嚴格遞減（strictly decreasing）。

在以下每一步二分法中，我們都保留 f 變號的那一半。由於 $\mathrm{f}(\frac{1}{2}\pi) > 0$，一切都取決於 $\mathrm{f}(c_n)$ 的正負：若 $\mathrm{f}(c_n) < 0$，根在 c_n 的左邊；若 $\mathrm{f}(c_n) > 0$，根就在右邊。

求 I_1

這裏 $c_0 = \frac{3}{4}\pi$，而

$$\mathrm{f}(\tfrac{3}{4}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{3}{4}\pi \approx 1.4 - \tfrac{3}{4}\sqrt{10}.$$

由於 $\sqrt{10} > 3$，我們有 $\frac{3}{4}\sqrt{10} > 2.25 > 1.4$，所以 $\mathrm{f}(c_0) < 0$。連同 $\mathrm{f}(a_0) > 0$，可得 $\mathrm{f}(a_0)\mathrm{f}(c_0) < 0$，所以

$$I_1 = [\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{4}\pi].$$

求 I_2

現在 $c_1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + \frac{3}{4}\pi) = \frac{5}{8}\pi$，我們需要知道 $2\sin\frac{5}{8}\pi - \frac{5}{8}\pi$ 的正負。

想一想 不用計算機，怎樣求 $\sin\frac{5}{8}\pi$？

利用 $\sin\frac{5}{8}\pi = \sin(\pi - \frac{5}{8}\pi) = \sin\frac{3}{8}\pi = \cos\frac{1}{8}\pi$，再以 $\theta = \frac{1}{8}\pi$ 代入倍角公式（double-angle formula）$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$：

$$4\cos^2\tfrac{1}{8}\pi = 2\big(1+\cos\tfrac{1}{4}\pi\big) = 2+\sqrt{2}.$$

所以 $(2\sin\frac{5}{8}\pi)^2 = 2+\sqrt{2}$。$2\sin\frac{5}{8}\pi$ 和 $\frac{5}{8}\pi$ 都是正數，所以可以比較它們的平方：

$$(2\sin\tfrac{5}{8}\pi)^2 = 2+\sqrt{2} \approx 3.4, \qquad (\tfrac{5}{8}\pi)^2 \approx \tfrac{25}{64}\cdot 10 = \tfrac{250}{64} \approx 3.9.$$

因此 $2\sin\frac{5}{8}\pi < \frac{5}{8}\pi$，即 $\mathrm{f}(c_1) < 0$。同樣地，$\mathrm{f}(a_1) = \mathrm{f}(\frac{1}{2}\pi) > 0$，所以 $\mathrm{f}(a_1)\mathrm{f}(c_1) < 0$，於是

$$I_2 = [\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{5}{8}\pi],$$

正如題目所求。

求 I_3

現在 $c_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + \frac{5}{8}\pi) = \frac{9}{16}\pi$。與之前一樣，$\sin\frac{9}{16}\pi = \sin\frac{7}{16}\pi = \cos\frac{1}{16}\pi$，再以 $\theta = \frac{1}{16}\pi$ 代入倍角公式，得

$$(2\sin\tfrac{9}{16}\pi)^2 = 4\cos^2\tfrac{1}{16}\pi = 2\big(1+\cos\tfrac{1}{8}\pi\big) = 2+2\cos\tfrac{1}{8}\pi = 2+\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

當中用到上一步得出的 $2\cos\frac{1}{8}\pi = \sqrt{2+\sqrt{2}}$。取 $\sqrt{2} \approx 1.4$，我們有 $\sqrt{2+\sqrt{2}} \approx \sqrt{3.4} > 1.8$（因為 $1.8^2 = 3.24$），所以

$$(2\sin\tfrac{9}{16}\pi)^2 > 3.8, \qquad (\tfrac{9}{16}\pi)^2 \approx \tfrac{81}{256}\cdot 10 = \tfrac{810}{256} < 3.2.$$

所以 $2\sin\frac{9}{16}\pi > \frac{9}{16}\pi$，即 $\mathrm{f}(c_2) > 0$。這一次 $\mathrm{f}(a_2)\mathrm{f}(c_2) > 0$，而 $\mathrm{f}(c_2)\mathrm{f}(b_2) = \mathrm{f}(\frac{9}{16}\pi)\,\mathrm{f}(\frac{5}{8}\pi) < 0$。因此

$$I_3 = [\tfrac{9}{16}\pi, \tfrac{5}{8}\pi].$$

這裏使用近似值是穩妥的：在每個中點處，所比較的兩個量相差約 0.5 或以上，遠大於 $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$ 或 $\pi \approx \sqrt{10}$ 所帶來的誤差。

驗算

- 以數值方法執行二分法，得到的區間相同，而根為 $\alpha \approx 1.8955$，位於 $\frac{9}{16}\pi \approx 1.767$ 與 $\frac{5}{8}\pi \approx 1.963$ 之間。
- 精確值與近似值吻合：$\mathrm{f}(\frac{3}{4}\pi) \approx -0.942$，$\mathrm{f}(\frac{5}{8}\pi) \approx -0.116$，以及 $\mathrm{f}(\frac{9}{16}\pi) \approx 0.194$。
- 每個區間的長度都是前一個的一半：$\frac{1}{2}\pi$、$\frac{1}{4}\pi$、$\frac{1}{8}\pi$、$\frac{1}{16}\pi$。

常見錯誤

- 只指出函數變號，卻沒有解釋為何只有一個根。單憑變號只能保證至少有一個根；要證明唯一性（uniqueness），還需要「一個遞減、一個遞增」的論證。
- 以平方來比較 $2\sin c$ 和 c，卻沒有先指出兩者都是正數。

STEP 之外

變號論證其實就是介值定理（intermediate value theorem），它是大學分析課程中最早遇到的重要定理之一；其證明需要用到實數的完備性（completeness），而二分法本質上就是把這個證明當作演算法來執行。二分法必定收斂，但速度緩慢（每一步只多得一個二進制位）。牛頓－拉弗森法（Newton–Raphson）等方法收斂得快得多，但有可能失敗，所以數值分析（numerical analysis）在很大程度上就是在穩妥與速度之間作取捨。有關理論可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。