詳細解答

STEP II 2004，第 6 題

純數學 • 向量分解

> **STEP II 2004，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q6

關鍵思路

把一個向量（vector）分拆成沿 $\mathbf{a}$ 方向的部分和垂直（perpendicular）於 $\mathbf{a}$ 的部分，其實就是投影（projection）：由於 $\mathbf{a}$ 是單位向量（unit vector），任何向量 $\mathbf{v}$ 沿它的分量（component）就是 $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{a}$。第二部分是同一個想法，只是高了一個維度。向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{q}$ 是 Π 內兩個互相垂直的方向，而 $\mathbf{R}$ 則提供第三個與兩者垂直的方向。因此，我們既可以逐一向每個方向投影，也可以先設未知倍數，再用點積（dot product）寫出垂直的條件。我們採用第二種做法，並以第一種做法作驗算。

解答

向量 p 與 q

由於 $\mathbf{p}$ 平行（parallel）於 $\mathbf{a}$，設 $\mathbf{p}=\lambda\mathbf{a}$。於是

$$\mathbf{q}=\mathbf{a}+\mathbf{b}-\lambda\mathbf{a}=(1-\lambda)\mathbf{a}+\mathbf{b},$$

它自然位於 Π 內，因為 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 都在其中。要使 $\mathbf{q}$ 垂直於 $\mathbf{a}$，我們需要

$$0=\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}=(1-\lambda)\,|\mathbf{a}|^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(1-\lambda)+3,$$

這裏用了 $|\mathbf{a}|=1$ 和 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=3$。所以 $\lambda=4$，並且

$$\boxed{\mathbf{p}=4\mathbf{a},\qquad \mathbf{q}=\mathbf{b}-3\mathbf{a}.}$$

確實有 $\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}=3-3=0$，以及 $\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$。（換一個說法，$\mathbf{p}$ 就是投影 $((\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}=4\mathbf{a}$。）

向量 P、Q 與 R

首先列出幾項稍後要用的事實。由 $|\mathbf{b}| = 5$，

$$|\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{b}|^2 - 6\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + 9|\mathbf{a}|^2 = 25 - 18 + 9 = 16,$$

所以 $|\mathbf{q}| = 4$。特別地，$\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$，故 $\mathbf{b}$ 不平行於 $\mathbf{a}$，而 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 張成（span）平面 Π。

設 $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{Q} = \beta\mathbf{q} = \beta(\mathbf{b} - 3\mathbf{a})$。這樣 $\mathbf{R}$ 就必定是

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \alpha\mathbf{a} - \beta(\mathbf{b} - 3\mathbf{a}) = \mathbf{c} + u\,\mathbf{a} + v\,\mathbf{b}, \qquad \text{其中} u = 1 - \alpha + 3\beta,\ v = 1 - \beta.$$

想一想 怎樣把「$\mathbf{R}$ 垂直於 Π」化成方程？

一個向量垂直於一個平面，當且僅當它垂直於該平面內兩個不平行的向量。我們剛剛看到 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 正是這樣的一對向量。所以條件就是 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = 0$ 和 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{b} = 0$。利用 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = -2$、$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 2$、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3$、$|\mathbf{a}|^2 = 1$ 和 $|\mathbf{b}|^2 = 25$：

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = -2 + u + 3v = 0,$$
$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{b} = 2 + 3u + 25v = 0.$$

由第一式得 $u = 2 - 3v$。代入第二式得 $8 + 16v = 0$，所以

$$v = -\tfrac{1}{2}, \qquad u = \tfrac{7}{2}.$$

於是 $\beta = 1 - v = \tfrac{3}{2}$，而 $\alpha = 1 + 3\beta - u = 1 + \tfrac{9}{2} - \tfrac{7}{2} = 2$。因此

$$\boxed{\mathbf{P} = 2\mathbf{a}, \qquad \mathbf{Q} = \tfrac{3}{2}(\mathbf{b} - 3\mathbf{a}), \qquad \mathbf{R} = \mathbf{c} + \tfrac{7}{2}\mathbf{a} - \tfrac{1}{2}\mathbf{b}.}$$

把三者相加，$\mathbf{a}$ 的係數（coefficient）是 $2 - \tfrac{9}{2} + \tfrac{7}{2} = 1$，$\mathbf{b}$ 的係數是 $\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2} = 1$，$\mathbf{c}$ 的係數是 1，所以 $\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$，符合要求。

最後，$\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$：假如它是零向量，$\mathbf{c} = \tfrac{1}{2}\mathbf{b} - \tfrac{7}{2}\mathbf{a}$ 便會位於 Π 內，與 $\mathbf{c}$ 不平行於 Π 這個假設矛盾。正是這個假設，令 $\mathbf{R}$ 成為一個真正的法向量（normal vector）。

另一個角度：向互相垂直的軸投影

單位向量 $\mathbf{a}$、$\hat{\mathbf{q}} = \tfrac{1}{4}(\mathbf{b} - 3\mathbf{a})$ 和 $\mathbf{n}$（Π 的一個單位法向量）組成一個正交歸一組（orthonormal set）。所以 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 就是 $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ 在前兩個向量上的投影：

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = 1 + 3 - 2 = 2, \qquad \text{所以} \mathbf{P} = 2\mathbf{a};$$
$$\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{q}} = \tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{q}) = \tfrac{1}{4}(0 + 16 + 8) = 6, \qquad \text{所以} \mathbf{Q} = 6\hat{\mathbf{q}} = \tfrac{3}{2}(\mathbf{b} - 3\mathbf{a}),$$

這裏用了 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{q} = 25 - 9 = 16$ 和 $\mathbf{c}\cdot\mathbf{q} = 2 + 6 = 8$。餘下的部分 $\mathbf{R}$，就是 $\mathbf{c}$ 沿 Π 法線方向的分量。這與上面的答案一致。

驗算

- 直接驗算：$\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = -2 + \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 0$，而 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{b} = 2 + \frac{21}{2} - \frac{25}{2} = 0$。
- 一個具體例子：取 $\mathbf{a} = \mathbf{i}$、$\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$，它們滿足所有已知條件。這時 $\mathbf{q} = 4\mathbf{j}$、$\mathbf{P} = 2\mathbf{i}$、$\mathbf{Q} = 6\mathbf{j}$ 及 $\mathbf{R} = \mathbf{k}$，而它們的和是 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$。
- 我們亦用 2000 組滿足條件、方向隨機的向量組合測試過這些公式。每一次都有 $\mathbf{q}\cdot\mathbf{a} = 0$、$|\mathbf{q}| = 4$，$\mathbf{R}$ 是 Π 的法向量，而且三個向量之和等於 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$，誤差全部在 10^{-9} 以內。

常見錯誤

- 取 $\mathbf{p} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a} = 3\mathbf{a}$，這只是 $\mathbf{b}$ 本身的投影。我們需要的是 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 的投影，即 $4\mathbf{a}$。
- 只加上 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = 0$ 這一個條件。要垂直於一個平面，需要兩個獨立的條件。
- 假設 $\mathbf{P} = \mathbf{p}$ 及 $\mathbf{Q} = \mathbf{q}$。加入 $\mathbf{c}$ 之後，平面內的分量也會改變，因為 $\mathbf{c}$ 本身在 Π 內也有分量。

STEP 之外

這是格拉姆－施密特正交化過程（Gram–Schmidt process）的縮影。我們由 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 出發，構造出兩兩垂直的方向 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{c} + \frac{7}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$，然後把一個向量沿這些方向分解。同樣的步驟在任何維數都適用。它是正交投影（orthogonal projection）、最小二乘擬合（least-squares fitting）和矩陣的 QR 分解（QR factorisation）的基礎。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門教材）對這些課題都有詳細闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。