詳細解答

STEP II 2004，第 5 題

純數學 • 積分方程

> **STEP II 2004，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q5

關鍵思路

未知函數藏在積分(integral)之內，看起來很嚇人，但只要用複角公式(compound-angle formula）把 $\sin(x+t)$ 展開，t 就可以移到積分之外，而留在積分內的只是兩個固定的數。因此 f 必定是 t 加上 $\sin t$ 與 $\cos t$ 的一個組合，整個問題於是歸結為由兩條線性方程求出兩個常數。第一部分的兩個積分，正是那條方程所需要的。

解答

兩個積分

運用分部積分法（integration by parts），取 $u = x$ 及 $\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$：

$$\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-x\cos x\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x = (-\pi\cos\pi - 0) + \Big[\sin x\Big]_0^\pi = \pi.$$

同樣地，取 $u = x$ 及 $\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$：

$$\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[x\sin x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 0 - \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = -(1+1) = -2.$$

我們還需要在 $[0,\pi]$ 上的三個標準積分：

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\pi \sin x\cos x\,\mathrm{d}x = 0.$$

頭兩個可由 $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ 及 $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ 得出，因為 $\cos 2x$ 在一整個周期上的積分為零；第三個是 $\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2x\,\mathrm{d}x = 0$，理由相同。

f 的形式

展開 $\sin(x+t) = \sin x\cos t + \cos x \sin t$。積分是對 x 進行的，所以 $\sin t$ 和 $\cos t$ 都是常數，可以移到積分之外：

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(t) &= t + \int_0^\pi \mathrm{f}(x)(\cos x \sin t + \sin x \cos t)\,\mathrm{d}x \\ &= t + \sin t \int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x + \cos t \int_0^\pi \mathrm{f}(x)\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= t + A\sin t + B\cos t, \end{aligned}$$

其中 A 和 B 就是題目給出的兩個積分。由於它們與 t 無關，所以是真正的常數。這就是所要求的形式。

求 A 和 B

想一想 我們並不知道 f 是甚麼，那又怎樣求出 A 和 B 呢？

我們其實知道它的形狀：$\mathrm{f}(x) = x + A\sin x + B\cos x$。把它代回 $(*)$，積分就變成可以用 A 和 B 表示並計算出來的式子，再比較等式兩邊，便得到這兩個常數所滿足的方程。

代入 $(*)$ 的右邊，並利用上面 $\sin(x+t)$ 的展開式：

$$t + \sin t \int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\cos x\,\mathrm{d}x + \cos t \int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x.$$

利用先前求得的積分，

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\cos x\,\mathrm{d}x &= -2 + A\cdot 0 + B\cdot\frac{\pi}{2} = -2 + \frac{\pi}{2}B, \\ \int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x &= \pi + A\cdot\frac{\pi}{2} + B\cdot 0 = \pi + \frac{\pi}{2}A. \end{aligned}$$

所以 $(*)$ 表示，對於每一個 t，

$$t + A\sin t + B\cos t = t + \left(-2 + \frac{\pi}{2}B\right)\sin t + \left(\pi + \frac{\pi}{2}A\right)\cos t.$$

比較 $\sin t$ 和 $\cos t$ 的係數（這樣做是合理的，因為此恆等式對所有 t 都成立：先代入 $t = \frac{\pi}{2}$，再代入 $t = 0$，便可分別抽出每個係數），得

$$A = -2 + \frac{\pi}{2}B, \qquad B = \pi + \frac{\pi}{2}A.$$

把第二式代入第一式，

$$A = -2 + \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{4}A \quad\Longrightarrow\quad A\left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2} - 2, \quad \text{即} \quad A\cdot\frac{4-\pi^2}{4} = -\frac{4-\pi^2}{2}.$$

由於 $\pi^2 \neq 4$，我們可以除以 $4-\pi^2$，得 $A = -2$。於是 $B = \pi + \frac{\pi}{2}(-2) = 0$。因此

$$A = -2, \qquad B = 0, \qquad \text{所以} \qquad \mathrm{f}(t) = t - 2\sin t.$$

驗算

直接用 A 和 B 的定義來核對答案。取 $\mathrm{f}(x) = x - 2\sin x$，

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x = -2 - 2\cdot 0 = -2 = A, \qquad \int_0^\pi \mathrm{f}(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \pi - 2\cdot\frac{\pi}{2} = 0 = B.$$

數值方面，用辛普森法則(Simpson's rule)可得 $\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x \approx 3.14159$ 及 $\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x \approx -2.00000$。我們又取 $\mathrm{f}(t) = t - 2\sin t$，在五十個隨機的 t 值上計算 $(*)$ 的右邊，每一次所得的結果與 $\mathrm{f}(t)$ 的差距都在 10^{-9} 之內。

常見錯誤

- 忘記 $\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x$ 中的負號：邊界項為零，而 $-\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = -2$。
- 弄錯哪一個積分與 $\sin t$ 相乘。$\sin(x+t)$ 中 $\cos x\sin t$ 的部分給出 $A\sin t$，其中 $A = \int \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x$，而不是 $\int \mathrm{f}(x)\sin x\,\mathrm{d}x$。
- 除以 $1 - \frac{\pi^2}{4}$ 時，沒有指出它不等於零。

STEP 之外

方程 $(*)$ 是一條*第二類弗雷德霍姆積分方程*（*Fredholm integral equation of the second kind*）。它的核（kernel）$\sin(x+t) = \sin x\cos t + \cos x\sin t$ 是有限個「x 的函數乘以 t 的函數」之和（稱為「退化」（degenerate）核或「可分離」（separable）核），這正是問題能夠化約為一個 2×2 線性方程組（linear system）的原因。條件 $\pi^2 \neq 4$ 所說的，就是這個方程組的行列式（determinant）不等於零；假如行列式為零，方程便可能無解，或有無限多個解，這就是奇異矩陣（singular matrix）在積分方程中的對應情況。至於這背後的線性代數，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。