詳細解答

# STEP II 2004，第 4 題

純數學 • 幾何中的最優化

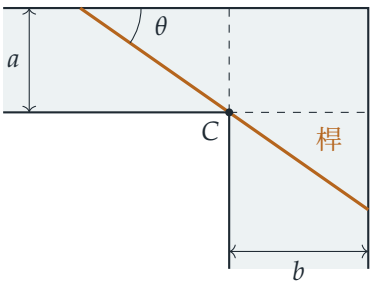
> **STEP II 2004，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q4

## 關鍵思路

無論怎樣搬，桿（或桌子）都要由指向一條走廊的方向，轉到指向另一條走廊的方向，所以在某一刻，它與牆壁所成的角必會取遍兩者之間的每一個角 $\theta$。對固定的角度而言，空間最寬裕的位置就是剛好擦過內角的那條直線，而這段長度用直角三角形（right-angled triangle）很容易算出。因此，物件能夠轉過彎角，當且僅當它的長度不超過這些長度在所有角度之中的最小者，而微積分（calculus）正好可以求出這個最小值（minimum）。

## 解答

以下一律把外角放在原點（origin），外牆分別沿 $y = 0$（闊度為 $a$ 的走廊，向左延伸）和 $x = 0$（闊度為 $b$ 的走廊，向下延伸）。於是內角位於 $C = (-b, -a)$。



**第 (i) 部分**

假設在某一刻，桿與 $a$ 走廊的牆壁成銳角（acute angle）$\theta$，並如圖所示由外牆 $y = 0$ 向下斜向外牆 $x = 0$。

*角度爲 $\theta$ 時最長的線段。*取通過 $C$ 而傾角為 $\theta$ 的直線。由 $C$ 向上到牆 $y = 0$，垂直升高了 $a$，所以這一段的長度是 $a\operatorname{cosec}\theta$；由 $C$ 橫向到牆 $x = 0$，水平移動了 $b$，所以這一段的長度是 $b\sec\theta$。因此，這條直線夾在兩道外牆之間的弦（chord）的長度為

$$f(\theta) = a\operatorname{cosec}\theta + b\sec\theta.$$

任何其他傾角為 $\theta$ 而由一條走廊伸入另一條走廊的直線，都必須在 $C$ 的外側經過（否則它會穿過內牆）。這樣的直線與兩道外牆圍出一個較小的相似（similar）直角三角形，所以它在外牆之間的弦比 $f(\theta)$ 短。另外，假如此刻桿完全位於 $a$ 走廊之內，它就容納在一條闊度為 $a$ 的長帶裏，所以 $L\sin\theta \le a$，由此得 $L \le a\operatorname{cosec}\theta < f(\theta)$；同理，假如它完全位於 $b$ 走廊之內，則 $L \le b\sec\theta < f(\theta)$。無論哪一種情況，都有

$$L \le f(\theta) \quad \text{對桿所經過的每一個角 } \theta \text{ 均成立。}$$

當桿由沿着第一條走廊轉到沿着第二條走廊時，$\theta$ 由接近 0 連續地變到接近 $\frac{1}{2}\pi$，所以它會取遍其間的每一個值。因此 $L \le f(\theta)$ 對每一個 $\theta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ 都成立，也就是說，$L$ 不超過 $f$ 的最小值。

*求 $f$ 的最小值。*求導（differentiate）得

$$f'(\theta) = -\frac{a\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{b\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{b\sin^3\theta - a\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}.$$

這個式子等於零，當且僅當 $\tan^3\theta = a/b$；由於 tan 在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上遞增，這個方程在該區間內只有一個解 $\alpha$。$f'$ 的正負號與 $b\tan^3\theta - a$ 相同，在 $\alpha$ 之前為負，之後為正，所以 $\alpha$ 給出最小值。（此外，在區間兩端均有 $f \to \infty$。）在 $L \le f(\theta)$ 中取 $\theta = \alpha$，得

$$L \le a\operatorname{cosec}\alpha + b\sec\alpha, \qquad \tan^3\alpha = \frac{a}{b},$$

這正是所要證明的。

**第 (ii) 部分**

現在由桌子的長邊擔當桿的角色。桌子的內側長邊位於一條傾角為 $\theta$ 的直線上，外側長邊則位於與之平行、向外角方向再遠 $w$ 的直線上。桌子外側的兩個角都必須位於外牆之內。

*外側長邊可用的空間。*設一條傾角為 $\theta$ 的直線與外角 $O$ 的距離為 $d$，它在 $O$ 處截出一個直角三角形，其斜邊（hypotenuse）為 $c$（即兩牆之間的弦），兩條直角邊為 $c\cos\theta$ 和

$c\sin\theta$，由 $O$ 所作的高為 $d$。這個三角形面積的兩倍既等於 $c\cos\theta\cdot c\sin\theta$，又等於 $cd$，所以

$$c=\frac{d}{\sin\theta\cos\theta}=2d\operatorname{cosec}2\theta.$$

可見弦長與直線到 $O$ 的距離成正比。因此，把直線向內（即向 $O$ 的方向）移動 $w$，它的弦便會縮短 $2w\operatorname{cosec}2\theta$。

**想一想** 為甚麼外側長邊必須容納在兩道外牆之間，而且是在比通過 $C$ 的直線再靠內 $w$ 的那條直線上？

內側長邊不能越過內角，所以它位於通過 $C$ 的直線上，或在該直線的外側。於是外側長邊所在的直線至少再向外 $w$，其弦長至多為 $f(\theta)-2w\operatorname{cosec}2\theta$。（兩條短邊由外側的兩個角向內伸展，與長邊垂直，並且留在走廊之內，所以不會帶來額外的限制。）假如整張桌子都位於 $a$ 走廊之內，則它橫跨長帶的高度滿足 $l\sin\theta+w\cos\theta\le a$。由此得出的上界 $l\le(a-w\cos\theta)\operatorname{cosec}\theta$ 比下文的 $g(\theta)$ 小了 $(b-w\sin\theta)\sec\theta>0$，這是因為 $w<b$。$b$ 走廊的情況亦相同。所以，與第 (i) 部分完全一樣，要成功搬過彎角，必須有 $l\le g(\theta)$ 對所有 $\theta\in(0,\frac12\pi)$ 成立，其中

$$g(\theta)=a\operatorname{cosec}\theta+b\sec\theta-2w\operatorname{cosec}2\theta.$$

（桌子必須比兩條走廊都窄，即 $w<a$ 且 $w<b$，否則它連沿走廊移動也辦不到。）

求 $g$ 的最小值。由於 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\operatorname{cosec}2\theta=-\dfrac{2\cos2\theta}{\sin^2 2\theta}$，

$$g'(\theta)=-\frac{a\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{b\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{4w\cos2\theta}{\sin^2 2\theta}.$$

兩邊乘以 $\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac14\sin^2 2\theta>0$。於是 $g'(\theta)=0$ 當且僅當

$$-a\cos^3\theta+b\sin^3\theta+w\cos2\theta=0,\qquad\text{即}\qquad w\cos2\theta=\cos^3\theta\,(a-b\tan^3\theta).$$

利用 $\cos2\theta=\cos^2\theta\,(1-\tan^2\theta)$ 改寫，再除以 $\cos^2\theta$。假如 $\theta=\frac14\pi$，方程便會變成 $0=\frac{1}{2\sqrt2}(a-b)$，但 $a\ne b$，所以這不可能。因此在駐點（stationary point）處 $\tan^2\theta\ne1$，我們可以除以 $1-\tan^2\theta$，得到

$$w=\left(\frac{a-b\tan^3\theta}{1-\tan^2\theta}\right)\cos\theta.$$

當 $\theta\to0^+$ 時，$g(\theta)\approx(a-w)/\theta\to+\infty$，因為 $w<a$；同理，當 $\theta\to\frac12\pi^-$ 時 $g\to+\infty$，因為 $w<b$。所以連續（continuous）函數 $g$ 在區間內部的某一點取得最小值，而在該點 $g'=0$。把這一點記為 $\beta$；它滿足上面列出的方程。在 $l\le g(\theta)$ 中取 $\theta=\beta$，得

$$l\le a\operatorname{cosec}\beta+b\sec\beta-2w\operatorname{cosec}2\beta,$$

這正是所要證明的。（事實上，對方程的任何一個根 $\beta$ 都有 $l\le\min g\le g(\beta)$，所以題目指的是哪一個根並無影響。）

## 驗算

- 在第 (ii) 部分中取 $w = 0$，便得 $\tan^3\beta = a/b$ 以及第 (i) 部分的上界，與預期相符。
- 在第 (i) 部分中，$\sin\alpha = a^{1/3}/\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}$ 而 $\cos\alpha = b^{1/3}/\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}$，所以上界是 $\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$。當 $a = 1$，$b = 8$ 時，這個值是 $5^{3/2} \approx 11.18$，而以數值方法搜尋 $f$ 的最小值，結果亦與此吻合。
- 我們隨機選取了數百組 $a \neq b$ 和 $w < \min(a,b)$，以窮舉法求出 $g$ 的最小值，並確認取得最小值的角度滿足關於 $\beta$ 的方程。我們亦直接用坐標核對了各弦的長度。

## 常見錯誤

- 求了 $f$ 的最大值而不是最小值。桿必須捱得過最差的角度，所以上界是可用長度的最小值。
- 以為受外牆限制的是桌子的內側長邊。其實被擠壓的是外側長邊，它位於距離外角近 $w$ 的那條直線上。
- 除以 $1-\tan^2\beta$ 時，沒有留意到這一步需要 $a \neq b$。

## STEP 之外

第 (i) 部分是經典的「梯子轉彎」問題，其答案 $\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$ 與星形線（astroid）有關：通過內角的各條直線掃出一條包絡線（envelope）。第 (ii) 部分則是搬沙發問題（moving sofa problem）的一個小特例：在闊度為一個單位的直角彎角中，能夠搬過去的圖形之中，面積最大的是哪一個？這個問題由 Leo Moser 於 1966 年提出，在其後的大部分歲月裏一直未能完全解決。如果想做更多這類幾何與微積分交匯的題目，可以試試 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。