詳細解答

STEP II 2004，第 3 題

純數學 • 曲線描繪

> **STEP II 2004，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q3

關鍵思路

一切都源自同一條曲線。對於 C，先把導數(derivative)徹底因式分解：重複因式 $(x-2)$ 在求導之後仍然保留，餘下的只是一個二次式。其餘兩條曲線都是由 C 建構出來的，毋須從頭做起：在 (i) 中取 $y=\pm\sqrt{f(x)}$，在 (ii) 中則把 x^2 代入 f。要留意 f 在哪裏取正值、在哪裏有單根（simple root）、在哪裏有重根（repeated root）；曲線的形狀正是由這些細節決定的。

解答

設 $f(x)=x(x+1)(x-2)^4$，則 C 就是 $y=f(x)$。

C 的駐點

利用乘積法則（product rule），並抽出公因式 $(x-2)^3$，

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+1)(x-2)^4 + 4x(x+1)(x-2)^3 \\ &= (x-2)^3[(2x+1)(x-2)+4x^2+4x] \\ &= (x-2)^3(6x^2+x-2) \\ &= (x-2)^3(3x+2)(2x-1). \end{aligned}$$

所以駐點（stationary point）位於 $x=-\frac{2}{3}$、$x=\frac{1}{2}$ 和 $x=2$，而

$$f(-\tfrac{2}{3}) = (-\tfrac{2}{3})(\tfrac{1}{3})(-\tfrac{8}{3})^4 = -\frac{8192}{729}, \qquad f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot(-\tfrac{3}{2})^4 = \frac{243}{64}, \qquad f(2)=0.$$

要判別這些駐點的類型，可考察 f' 各因式的正負號：

	$x < -\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 2$	$x > 2$
$(x-2)^3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(3x+2)(2x-1)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

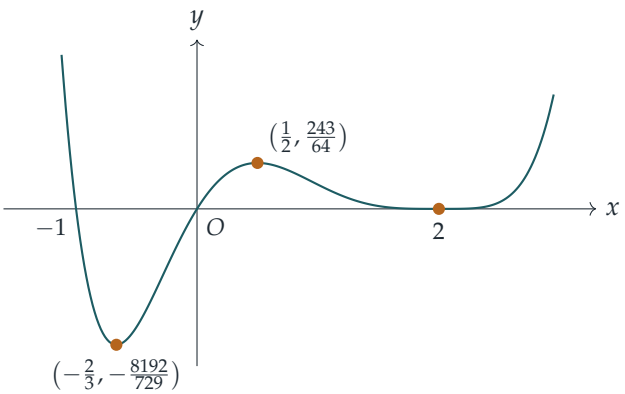
因此

- $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{8192}{729}\right)$ 是極小點（minimum）（f' 由 $-$ 變為 $+$）；
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{243}{64}\right)$ 是極大點（maximum）（f' 由 $+$ 變為 $-$）；
- $(2, 0)$ 是極小點（f' 由 $-$ 變為 $+$）。

最後一個即使不用微積分也顯而易見：在 $x = 2$ 附近 $f(x) \geq 0$，因為在那裏 $x(x+1) > 0$，而 $(x-2)^4 \geq 0$。

描繪 C

曲線在 $x = -1$ 和 $x = 0$ 處穿過 x 軸（兩者都是單根，斜率分別為 $f'(-1) = -81$ 和 $f'(0) = 16$），並在 $x = 2$ 處與該軸相切。在 $x = 2$ 附近，$f(x) \approx 2 \cdot 3\,(x-2)^4 = 6(x-2)^4$，所以曲線在那裏非常平坦。由於 f 是一個 6 次多項式，而且首項係數為正，$y \to +\infty$ 當 $x \to \pm\infty$。草圖中的縱軸比例經過壓縮。



第 (i) 部分

現在 $y^2 = f(x)$，所以 $y = \pm\sqrt{f(x)}$。以下三點足以確定曲線的形狀。

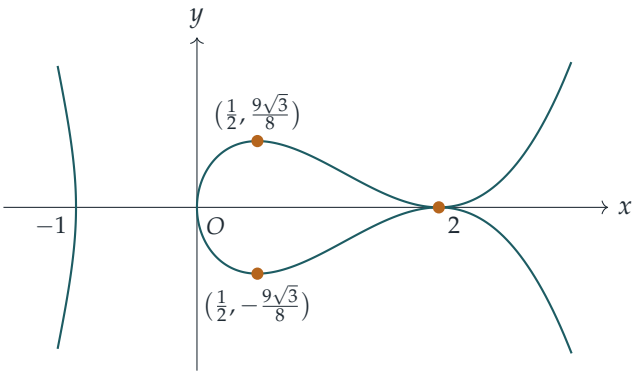
- 曲線存在的範圍。我們需要 $f(x) \geq 0$，由 C 可知這表示 $x \leq -1$ 或 $x \geq 0$。在 $-1 < x < 0$ 的範圍內沒有曲線。
- 對稱性。把 y 換成 $-y$，方程不變，所以曲線關於 x 軸對稱。只需描繪上半部分 $y = \sqrt{f(x)} = (x-2)^2\sqrt{x(x+1)}$，再作反射即可。

- 駐點。對於 $y=\sqrt{f}$，當 $f>0$ 時有 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f'/(2\sqrt{f})$，所以上半部分的駐點恰好出現在 $f'=0$ 且 $f>0$ 之處。這樣只剩下 $x=\frac{1}{2}$（$x=-\frac{2}{3}$ 這一點在定義域之外），於是在 $\left(\frac{1}{2},\sqrt{243/64}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$ 有一個極大點，而在下半部分的 $\left(\frac{1}{2},-\frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$ 有一個極小點。

想一想 在 $f=0$ 的三點 $(-1,0)$、$(0,0)$ 和 $(2,0)$，曲線會怎樣？

在單根處，例如 $x=0$，$f(x)\approx 16x$，所以在原點附近 $y^2\approx 16x$：這是一條橫臥的拋物線，曲線穿過橫軸時的切線是鉛垂的。在 $x=-1$ 處情況相同，那裏 $y^2\approx 81(-1-x)$。在重根 $x=2$ 處，$y^2\approx 6(x-2)^4$，所以 $y\approx\pm\sqrt{6}\,(x-2)^2$：這是兩段形如拋物線的弧，一段在橫軸之上，一段在橫軸之下，兩者都在 $(2,0)$ 與 x 軸相切。因此上下兩半在該處相遇，並有共同的水平切線；在 $(2,0)$ 處，上半部分取得極小值，下半部分取得極大值。

當 $|x|$ 很大時，$y\approx\pm|x|^3$。所以曲線包括一個由 $(0,0)$ 到 $(2,0)$ 的閉合環，它在 $(2,0)$ 處收窄成一點，然後延伸為兩條向右張開的分支；另外還有獨立的一段，經過 $(-1,0)$ 並向左張開。



第 (ii) 部分

這裏 $y=x^2(x^2+1)(x^2-2)^4=f(x^2)$。以下兩點觀察已解決了大部分問題。

- 曲線關於 y 軸對稱，因為 x 只以 x^2 的形式出現。
- 當 x 走遍 $[0,\infty)$ 時，$u=x^2$ 亦遞增地走遍 $[0,\infty)$，所以對於 $x\geq 0$，這條曲線就是 C 中 $x\geq 0$ 的部分，只是重新參數化而已。特別是處處都有 $y\geq 0$，而 C 中對應負 x 的一段（包括其極小點）完全不起作用。

由鏈式法則（chain rule），

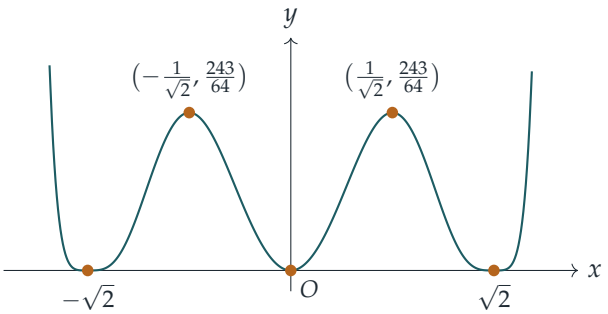
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\,f'(x^2)=2x\,(x^2-2)^3(3x^2+2)(2x^2-1),$$

當 $x=0$、$x^2=\frac{1}{2}$ 或 $x^2=2$ 時，上式等於零（因式 $3x^2+2$ 永不為零）。在 $u\geq 0$ 上，f

由 0 上升至 $u = \frac{1}{2}$ 處的極大值，再下降至 $u = 2$ 處的 0，之後一直上升；而對於 $x \geq 0$，$u = x^2$ 保持這個次序。所以駐點為

- 位於 $(0,0)$ 的極小點，該處 $y \approx 16x^2$；
- 位於 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{243}{64}\right)$ 的極大點；
- 位於 $(\pm\sqrt{2}, 0)$ 的極小點，曲線在該處非常平坦地與橫軸相切：$y \approx 384\,(x \mp \sqrt{2})^4$。

當 $|x|$ 很大時，$y \approx x^{12}$，上升得極為陡峭。



驗算

先對導數作一個簡單的合理性檢查：在 $x = 0$ 處，$f(x) = x(x+1)(x-2)^4 \approx 16x$，而確實有 $f'(0) = (-8)(2)(-1) = 16$。數值驗算方面，在隨機選取的點上把 f' 的因式分解與有限差分（finite difference）導數比較，結果吻合；又得出 $f(-\frac{2}{3}) \approx -11.237$ 和 $f(\frac{1}{2}) = 3.796875$，並求得 $\sqrt{f}$ 在 $[0,2]$ 上的最大值為 $1.94856\ldots = \frac{9\sqrt{3}}{8}$，在 $x = 0.5$ 處取得。至於 (ii)，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 在 $x \approx \pm 0.707$ 和 ± 1.414（以及 0）處變號，與預期一致。

常見錯誤

- 先把 f 展開才求導。這樣 f' 會是一個看不出任何因式的五次式；把 $(x-2)^3$ 留在括號外，就只需解一個二次方程。
- 在 (i) 中，於 $(0,0)$ 和 $(-1,0)$ 畫出尖點（cusp）或折角。在 f 的單根處，$y^2 = f(x)$ 的切線是鉛垂的。
- 在 (ii) 中，照搬 C 在 $x = -\frac{2}{3}$ 處的極小點。由於 $x^2 \geq 0$，只會用到 C 中 $x \geq 0$ 的部分，而 y 永不為負。

STEP 之外

$y^2 = f(x)$ 在 f 的根附近的表現，正是研究代數曲線（algebraic curve）奇點（singular point）的起點：單根給出一個帶鉛垂切線的光滑點，而重根則給出兩條分支相遇之處，如 $(2,0)$ 的情況。當 f 是三次式時，曲線 $y^2 = f(x)$ 稱為橢圓曲線（*elliptic curves*），是現代數論的核心對象。若想仔細了解曲線描繪背後的微積分（單調性（monotonicity）、導數的正負號和鏈式法則），可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。