詳細解答

STEP II 2004，第 2 題

純數學 • 二次不等式

> **STEP II 2004，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q2

關鍵思路

絕對值（modulus）是唯一棘手的地方，而只要設 $t = |x|$，它就會消失。由於 $x^2 = |x|^2$，原不等式便化為一個關於 t 的普通二次不等式（quadratic inequality），並附帶條件 $t \geq 0$。接着只要配方（completing the square），或者考察判別式（discriminant），一切便一目了然。t 的每一個容許區間都對應 x 的兩個區間，分別位於原點兩側。

解答

以下一律設 $t = |x| \geq 0$。由於 $x^2 = t^2$，不等式 $(*)$ 正好等價於

$$q(t) = t^2 - \alpha t + 2 < 0, \qquad t = |x| \geq 0.$$

當 $|\alpha| < 2\sqrt{2}$ 時無解

配方得

$$q(t) = \left(t - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + 2 - \frac{\alpha^2}{4}.$$

若 $|\alpha| < 2\sqrt{2}$，則 $\alpha^2 < 8$，故 $2 - \frac{\alpha^2}{4} > 0$。平方項永不為負，所以對任何實數 t 都有 $q(t) > 0$，對 $t = |x|$ 自然也成立。因此對所有 x 均有 $x^2 - \alpha|x| + 2 > 0$，沒有任何 x 的值滿足 $(*)$。

$\alpha = 3$ 的情況

此時 $q(t) = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$，它恰好在 $1 < t < 2$ 時為負。所以 $(*)$ 成立當且僅當 $1 < |x| < 2$，解集為

$$\{x : -2 < x < -1\} \cup \{x : 1 < x < 2\}.$$

長度之和 S

設 $\alpha > 2\sqrt{2}$。則 $\alpha^2 > 8$，故 q 有兩個相異實根

$$t_1 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 8}}{2}, \qquad t_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 8}}{2},$$

而且由於 q 的首項係數為正，$q(t) < 0$ 恰好在 $t_1 < t < t_2$ 時成立。

> **想一想** 區間 $t_1 < t < t_2$ 會不會有一部分落在 t 為負的範圍？我們需要擔心這一點嗎？

不需要。兩根之積為 $t_1 t_2 = 2 > 0$，兩根之和為 $t_1 + t_2 = \alpha > 0$，所以兩根皆為正數。因此整個區間 (t_1, t_2) 都位於 $t > 0$ 之內，其中每一個 t 值都確實是 $|x|$ 可取的值。

所以 $(*)$ 成立當且僅當 $t_1 < |x| < t_2$，即

$$-t_2 < x < -t_1 \qquad \text{或} \qquad t_1 < x < t_2.$$

這是兩個互不相交的區間（因為 $t_1 > 0$），長度各為 $t_2 - t_1 = \sqrt{\alpha^2 - 8}$。因此

$$S = 2\sqrt{\alpha^2 - 8}.$$

由於 $\alpha^2 - 8 < \alpha^2$ 且 $\alpha > 0$，取正平方根得 $\sqrt{\alpha^2 - 8} < \alpha$，所以

$$S < 2\alpha,$$

這正是所要證明的。

S 對 α 的圖像

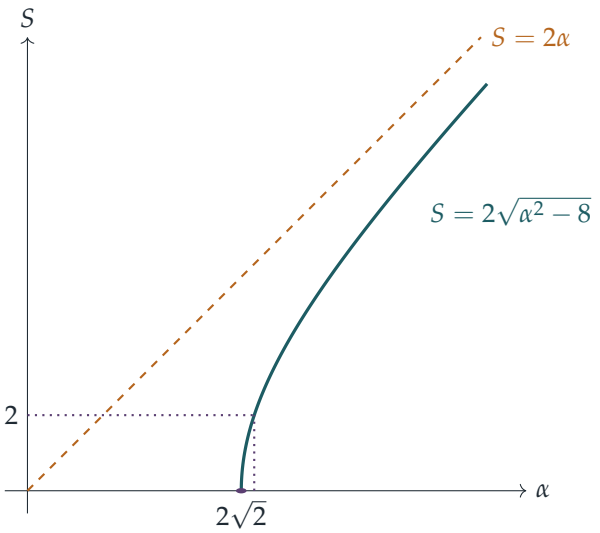
函數 $S = 2\sqrt{\alpha^2 - 8}$ 的定義域為 $\alpha > 2\sqrt{2}$（當 $\alpha \le 2\sqrt{2}$ 時根本沒有任何區間：在 $\alpha = 2\sqrt{2}$ 時有 $q(t) = (t - \sqrt{2})^2 \ge 0$，而只要 $\alpha \le 0$，對所有 $t \ge 0$ 都有 $q(t) \ge 2$）。它的主要特徵如下：

- 當 $\alpha \to 2\sqrt{2}^{+}$ 時 $S \to 0$，而 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} = \dfrac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 8}}$ 在該處趨向無窮大：曲線由 $(2\sqrt{2}, 0)$ 出發，該點的切線是鉛垂的。
- S 是遞增的，而且 $\dfrac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}\alpha^2} = -\dfrac{16}{(\alpha^2 - 8)^{3/2}} < 0$，所以曲線是凹的（concave）。

- 直線 $S = 2\alpha$ 是漸近線（asymptote），曲線從下方趨近它：由於 $(2\alpha - S)(2\alpha + S) = 4\alpha^2 - 4(\alpha^2 - 8) = 32$，

$$2\alpha - S = \frac{32}{2\alpha + S} \to 0 \quad \text{當} \alpha \to \infty.$$

事實上 $\frac{\alpha^2}{8} - \frac{S^2}{32} = 1$，所以這個圖像是雙曲線(hyperbola)的四分之一，漸近線為 $S = 2\alpha$。



驗算

- 當 $\alpha = 3$ 時，公式給出 $S = 2\sqrt{1} = 2$，與 $(-2, -1)$ 和 $(1, 2)$ 這兩個長度各為 1 的區間吻合（即圖中以虛點線標示、位於 $\alpha = 3$ 的那一點）。
- 當 $\alpha = 5$ 時，$S = 2\sqrt{17} \approx 8.246$；以數值方法量度 $[-20, 20]$ 內滿足 $x^2 - 5|x| + 2 < 0$ 的 x 所組成的集合，所得的值相同，而且明顯小於 $2\alpha = 10$。
- 當 α 很大時，$2\alpha - S \approx 8/\alpha$：在 $\alpha = 100$ 時，兩者相差 $0.0800\ldots$。

常見錯誤

- 忘記 $|x|$ 的每一個區間對應 x 的兩個區間，因而得出 $S = \sqrt{\alpha^2 - 8}$。
- 把 $\alpha = 3$ 的答案只寫成 $1 < x < 2$，漏掉了負的那一半。
- 使用判別式時，沒有指出關於 t 的兩個根皆為正數；當 $\alpha < 0$ 時，同樣的判別式條件卻完全沒有解，因為兩個根都是負數。

STEP 之外

函數 $x \mapsto x^2 - a|x| + 2$ 是偶函數（even function），所以它的解集是對稱的，而長度 S 就是該函數取負值的集合的測度（measure）。量度由不等式所定義的集合的大小，正是測度論（measure theory）和勒貝格積分（Lebesgue integration）的起點，大學二年級的分析課程會學到這些內容。若想細讀本題用到的極限、導數和不等式的嚴謹論述，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本實分析入門書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。