詳細解答

STEP II 2004，第 14 題

概率與統計 • 容斥原理

> **STEP II 2004，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q14

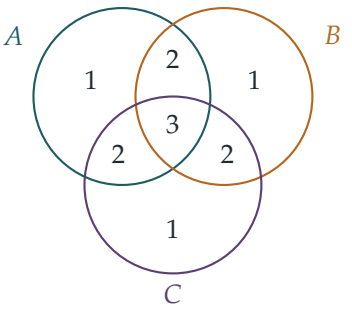
關鍵思路

容斥原理（inclusion–exclusion）是一種修正計數的方法：把 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$ 加起來時，重疊的部分被多算了，而兩兩相交與三者相交的項正好把計數修正過來。對於布甸這一題，考慮補事件（complement）會容易得多：設 E_i 為布甸 i 是空的這一事件（event）。某個布甸是空的概率是一個併集（union）的概率，這正是容斥原理所處理的情況，而且各個 E_i 的每一個交集（intersection）的概率都十分簡單。

解答

容斥公式

把 $A \cup B \cup C$ 分成溫氏圖（Venn diagram）中七個互不相交（disjoint）的區域。任何由若干個完整區域組成的事件，其概率等於這些區域的概率之和，所以只需驗證每個區域在等式右邊都恰好被計算一次。



圖中的數字表示每個區域落在 A、B、C 當中的多少個之內。取一個恰好落在三個事件

中 k 個之內的區域，其中 $k = 1$、2 或 3。

- 它出現在 $\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B), \mathrm{P}(C)$ 這些項當中的 k 項。
- 它出現在 $\binom{k}{2}$ 個兩兩交集之中，因為（舉例說）它落在 $A \cap B$ 之內，當且僅當它同時落在 A 和 B 之內。
- 只有當 $k = 3$ 時，它才出現在三者的交集之中，即出現 $\binom{k}{3}$ 次。

因此它被計算的淨次數為

$$k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} = \begin{cases} 1 - 0 + 0 = 1 & (k = 1), \\ 2 - 1 + 0 = 1 & (k = 2), \\ 3 - 3 + 1 = 1 & (k = 3). \end{cases}$$

$A \cup B \cup C$ 的每個區域都恰好被計算一次，而併集以外的區域則完全沒有被計算。所以等式右邊等於 $\mathrm{P}(A \cup B \cup C)$。

（另一個等價的做法：把兩個事件的法則 $\mathrm{P}(X \cup Y) = \mathrm{P}(X) + \mathrm{P}(Y) - \mathrm{P}(X \cap Y)$ 應用於 $X = A \cup B$ 和 $Y = C$，然後再應用於 $(A \cap C) \cup (B \cap C)$。）

每個布甸最少有一枚六便士硬幣

模型。徹底攪拌後再平均分成幾份，意思是每枚六便士硬幣（sixpence）落入布甸 1、2 或 3 的概率各為 $\frac{1}{3}$，並且與其他硬幣獨立（independent）。取 $r \geq 1$。

設 E_i 為布甸 i 內沒有六便士硬幣這一事件。

- 當全部 r 枚硬幣都沒有落入布甸 1 時，E_1 發生。每枚硬幣沒有落入布甸 1 的概率是 $\frac{2}{3}$，所以由獨立性可得 $\mathrm{P}(E_1) = \left(\frac{2}{3}\right)^r$，$E_2$、$E_3$ 亦同理。
- 當每枚硬幣都落入布甸 3 時，$E_1 \cap E_2$ 發生，所以 $\mathrm{P}(E_1 \cap E_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^r$，其餘各對亦同理。
- $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ 要求三個布甸全是空的，但由於 $r \geq 1$，這是不可能的。所以它的概率是 0。

由容斥原理，最少有一個布甸是空的概率為

$$p_r = \mathrm{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 3\left(\tfrac{2}{3}\right)^r - 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^r.$$

每個布甸最少有一枚六便士硬幣的概率就是其補事件的概率：

$$1 - 3\left(\tfrac{2}{3}\right)^r + 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^r = \frac{3^r - 3 \cdot 2^r + 3}{3^r}.$$

最少六枚六便士硬幣

我們要找出使 $p_r < \frac{1}{3}$ 的 r 值。直接計算可得

$$p_5 = \frac{3\cdot 32 - 3}{243} = \frac{93}{243} = \frac{31}{81} > \frac{27}{81} = \frac{1}{3}, \qquad p_6 = \frac{3\cdot 64 - 3}{729} = \frac{189}{729} = \frac{7}{27} < \frac{9}{27} = \frac{1}{3}.$$

為了確定沒有更小的 r 符合要求，我們證明 p_r 是遞減的。對於 $r \geq 1$，

$$p_{r+1} - p_r = 3\left(\tfrac{2}{3}\right)^r\left(\tfrac{2}{3} - 1\right) - 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^r\left(\tfrac{1}{3} - 1\right) = -\left(\tfrac{2}{3}\right)^r + 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^r = \left(\tfrac{1}{3}\right)^r\left(2 - 2^r\right),$$

當 $r = 1$ 時此式為 0，當 $r \geq 2$ 時為負數。所以 $p_1 = p_2 \geq p_3 \geq p_4 \geq p_5 = \frac{31}{81}$，而每個 $r \leq 5$ 都有 $p_r > \frac{1}{3}$。（當 $r = 0$ 時，每個布甸必然是空的。）因此，只有當 $r \geq 6$ 時，某個布甸沒有六便士硬幣的機會才會低於 $\frac{1}{3}$；又由於 p_r 持續遞減，每個 $r \geq 6$ 確實都有 $p_r \leq p_6 < \frac{1}{3}$。所以廚師必須使用 6 枚或以上的六便士硬幣，這正是所要證明的。

每個布甸有兩枚六便士硬幣

現在 $r = 6$。設 T 為每個布甸恰好有兩枚六便士硬幣這一事件，S 為每個布甸最少有一枚這一事件。由上一部分，

$$\mathrm{P}(S) = 1 - p_6 = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}.$$

把六枚（可區分的）六便士硬幣分配到各個布甸，共有 $3^6 = 729$ 種等可能的方法。其中每個布甸得到兩枚的方法數目，就是把六件物件分成三個有標號的對的方法數目，即 $\dfrac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$。所以 $\mathrm{P}(T) = \frac{90}{729} = \frac{10}{81}$。

> **想一想** 為甚麼 $\mathrm{P}(T \cap S)$ 就是 $\mathrm{P}(T)$？

如果每個布甸都有兩枚六便士硬幣，那麼每個布甸當然最少有一枚，所以 $T \subseteq S$，而 $T \cap S = T$。因此

$$\mathrm{P}(T \mid S) = \frac{\mathrm{P}(T)}{\mathrm{P}(S)} = \frac{10/81}{20/27} = \frac{10}{81}\cdot\frac{27}{20} = \frac{1}{6}.$$

驗算

對於 $r = 1$ 和 $r = 2$，公式給出每個布甸都有六便士硬幣的概率為 0，這是對的：少於三枚硬幣不可能令三個布甸都有硬幣。對於 $r = 3$，公式給出 $\frac{27-24+3}{27} = \frac{2}{9}$，與直接計數所得的 $3!/3^3 = 6/27$ 吻合。對 $r \leq 9$ 逐一列舉全部 3^r 種分配方法，結果與公式一致，並確認 $p_5 = \frac{31}{81} \approx 0.383$ 和 $p_6 = \frac{7}{27} \approx 0.259$，同時得出最終答案 $\frac{1}{6} \approx 0.167$（模擬 200 000 次布甸製作所得的結果是 0.166）。

常見錯誤

- 把六便士硬幣當作不可區分，並把 $6 = a + b + c$ 的 28 種寫法視為等可能。它們並非等可能：$(2,2,2)$ 可以有 90 種出現方式，而 $(6,0,0)$ 只有一種。
- 只檢查 $r = 6$ 和 $r = 5$。「必須使用 6 枚或以上」還要求每個更小的 r 都不符合要求，這就是單調性（monotonicity）那一步之所以重要的原因。
- 忘記三者的交集是空集，或者不加說明就把它的概率寫成 $(0)^r$。

STEP 之外

對於 n 個事件的一般容斥原理，涉及所有 k 重交集的交錯和，其證明用的正是上面的計數論證，當中用到 $\sum_{j\geq 1}(-1)^{j-1}\binom{k}{j} = 1$。把它應用於 n 個布甸，所數算的就是滿射（surjection）的數目，並與第二類斯特靈數（Stirling numbers of the second kind）以及經典的優惠券收集問題（coupon-collector problem）相關。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）對容斥原理和這類佔位問題（occupancy problem）有詳細闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。