詳細解答

# STEP II 2004，第 13 題

概率與統計 • 最優停止

> **STEP II 2004，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q13

## 關鍵思路

逐次抽球去想。假設她已經安全取得 $n$ 個白球，再抽一次的話，要麼多得 £1，要麼把手上的 £$n$ 全部輸掉，所以這一次抽球的期望（expected）效果很容易寫出來。以 $N$ 個球為目標時，總期望獎金會上升，當且僅當多抽那一球的期望得益為正，因此最佳目標就是該得益仍然非負的最後一個目標。

## 解答

全題假設 $1 \le r < b$，即最少有一個紅球和最少有一個白球。（若 $r = 0$，她只需把所有球取出。）

### 下一次抽球的期望得益

假設她首 $n$ 次抽到的都是白球。袋中現在有 $b-n$ 個球：$r$ 個紅球和 $b-n-r$ 個白球，每個球在下一次被抽出的機會均等（要還有白球剩下，須有 $n \le b-r-1$；無論如何 $b-n \ge r \ge 1$）。

- 抽到白球的概率（probability）為 $\dfrac{b-n-r}{b-n}$，她的獎金由 £$n$ 變為 £$(n+1)$：得益為 $+1$。
- 抽到紅球的概率為 $\dfrac{r}{b-n}$，她會失去本來可得的 £$n$：得益為 $-n$。

所以她下一次抽球的期望得益是

$$G_n = \frac{(b-n-r)\cdot 1 + r\cdot(-n)}{b-n} = \frac{b-r-n(r+1)}{b-n}.$$

分母為正，所以 $G_n = 0$ 當且僅當 $b - r = n(r+1)$，亦即

$$n = \frac{b-r}{r+1},$$

這正是所需的結果。更有用的是：當 $n < \dfrac{b-r}{r+1}$ 時 $G_n > 0$，而當 $n > \dfrac{b-r}{r+1}$ 時 $G_n < 0$。

**最佳的取球數目**

設 $P_N$ 為首 $N$ 次抽球全為白球的概率，並設 $E_N$ 為她以取出 $N$ 個球為目標時的總期望獎金。若該 $N$ 個球全為白球，她得到 £$N$，否則一無所得，所以

$$E_N = NP_N.$$

**想一想** 單次抽球的期望得益與總期望獎金 $E_N$ 有甚麼關係？

比較以 $N$ 為目標和以 $N+1$ 為目標這兩個方案。只有當首 $N$ 個球全為白球時，兩個方案才有分別（否則在兩個方案下她都已經輸掉），這情況出現的概率為 $P_N$；而在這情況下，多抽的一球使她的獎金改變，改變量的期望值為 $G_N$。因此

$$E_{N+1} - E_N = P_N G_N = P_N \frac{b-r-N(r+1)}{b-N}.$$

（亦可由 $P_{N+1} = P_N \cdot \frac{b-r-N}{b-N}$ 直接驗證。）

當 $N \le b-r$ 時，我們有 $P_N > 0$，所以 $E_{N+1} - E_N$ 的正負號與 $b-r-N(r+1)$ 相同。記 $k = N+1$，這就是下式的正負號：

$$(b+1) - k(r+1).$$

設 $m = \dfrac{b+1}{r+1}$。那麼當 $k < m$ 時 $E_k > E_{k-1}$，當 $k = m$ 時 $E_k = E_{k-1}$，而當 $k > m$ 時 $E_k < E_{k-1}$。所以數列（sequence）$E_0, E_1, E_2, \ldots$ 嚴格遞增至 $E_{\lfloor m \rfloor}$（若 $m$ 為整數，則出現相等的情況 $E_{m-1} = E_m$），然後嚴格遞減，至少在 $k-1 \le b-r$ 的範圍內如此。超出這範圍後 $P_N = 0$ 且 $E_N = 0$，不會更好。

我們應該驗證 $\lfloor m \rfloor$ 是一個合理的目標，即 $\lfloor m \rfloor \le b-r$。若 $b = r+1$，則 $m = \frac{r+2}{r+1}$，所以 $\lfloor m \rfloor = 1 = b-r$。若 $b \ge r+2$，則

$$(b-r)(r+1) - (b+1) = r(b-r-1) - 1 \ge r - 1 \ge 0,$$

所以 $m \le b-r$。無論哪種情況，$E_N$ 的最大值都在

$$n = \left\lfloor \frac{b+1}{r+1} \right\rfloor,$$

取得，即 $\frac{b+1}{r+1}$ 的整數部分，這正是所需的結果。

無論採用甚麼停止規則（stopping rule），這個目標也是她所能做到的最佳選擇：在決定是否繼續之前，她唯一能得知的就是至今抽出的每個球都是白球（否則遊戲已經結束），所以任何規則都等同於預先選定一個數 $N$。

### $r = 1$ 的情況

只有一個紅球時，首 $N$ 次抽球避開紅球，當且僅當紅球位於最後 $b - N$ 個位置之一，而各個位置的機會均等。所以

$$P_N = \frac{b-N}{b}, \qquad E_N = \frac{N(b-N)}{b}.$$

最佳目標是 $n = \left\lfloor \frac{b+1}{2} \right\rfloor$。

$b$ 爲偶數。這時 $\frac{b+1}{2} = \frac{b}{2} + \frac{1}{2}$，所以 $n = \frac{b}{2}$，且

$$E_n = \frac{\frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2}}{b} = \frac{b}{4}.$$

她的總期望獎金為 $£\frac{1}{4}b$，這正是所需的結果。

$b$ 爲奇數。這時 $n = \frac{b+1}{2}$，所以 $b - n = \frac{b-1}{2}$，且

$$E_n = \frac{\frac{b+1}{2} \cdot \frac{b-1}{2}}{b} = \frac{b^2-1}{4b}.$$

她的總期望獎金為 $£\dfrac{b^2-1}{4b}$。（這裏 $m = \frac{b+1}{2}$ 是整數，所以以 $\frac{b-1}{2}$ 個球為目標會得到相同的值，由對稱的公式 $N(b-N)/b$ 可以看出。）

## 驗算

- 當 $r = 1$ 時，$E_N = N(b-N)/b$ 是關於 $N$ 的開口向下的拋物線（parabola），頂點在 $N = b/2$，與兩個答案都吻合：$b$ 為偶數時，在頂點處恰好是 $b/4$；$b$ 為奇數時則略小，為 $\frac{b}{4} - \frac{1}{4b}$。
- 取 $b = 7$，$r = 2$：公式給出 $n = \lfloor 8/3 \rfloor = 2$，而直接計算得 $E_0, \ldots, E_5 = 0,\ \frac{5}{7},\ \frac{20}{21},\ \frac{6}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{5}{21}$，在 $N = 2$ 處達到最高。我們列舉了球的全部 7! 種排列次序來確認這一點，並就每個 $b \le 24$，以完整的最優停止計算核對了 $n$ 的公式。
- 當 $b = 9$，$r = 1$ 時，答案是 $\frac{80}{36} = \frac{20}{9} \approx 2.22$，剛好略低於 $\frac{9}{4}$。

## 常見錯誤

- 忘記了抽到紅球會令她失去已取得的 $£n$，而把期望得益只寫成 $\frac{b-n-r}{b-n}$。

- 混淆「已抽出 $n$ 個球」與「以 $n$ 個球為目標」：得益 $G_n$ 在 $n = \frac{b-r}{r+1}$ 時為零，所以最佳目標要再多一個，即 $\frac{b-r}{r+1} + 1 = \frac{b+1}{r+1}$。
- 遺漏了 $\frac{b+1}{r+1}$ 為整數時的相等情況：這時 $n$ 和 $n-1$ 同為最優。

## STEP 之外

這是一個小型的最優停止(optimal stopping)問題，而所用的論證就是「向前看一步」(one-step look-ahead）法則：一旦再走一步的期望得益為負，便立即停止。只要問題是單調（monotone）的，這個法則就是最優的；所謂單調，是指一旦繼續下去顯得不利，其後便一直不利，正如本題中 $G_n$ 隨 $n$ 遞減。同樣的想法會引伸到祕書問題（secretary problem），以及大學一、二年級概率論中的鞅（martingale）方法。Grimmett and Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）是打好背後條件期望（conditional expectation）工具基礎的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。