詳細解答

STEP II 2004，第 12 題

概率與統計 • 連續分佈

STEP II 2004，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/04-s2-q12

關鍵思路

一切都源自一個原函數（antiderivative）：除了一個常數因子之外，xe^{-ax^2} 就是 e^{-ax^2} 的導數。由此可求出歸一化常數(normalising constant)，並得到累積分佈函數(cumulative distribution function)的閉合形式，所以只需解一條指數方程便可求得中位數(median)。眾數（mode）就是曲線達到頂點的位置，前提是該頂點位於 $[0,1]$ 之內；否則概率密度在 $x=1$ 處仍在上升。至於條件概率（conditional probability），只需用到累積分佈函數在 m 和 h 的值。

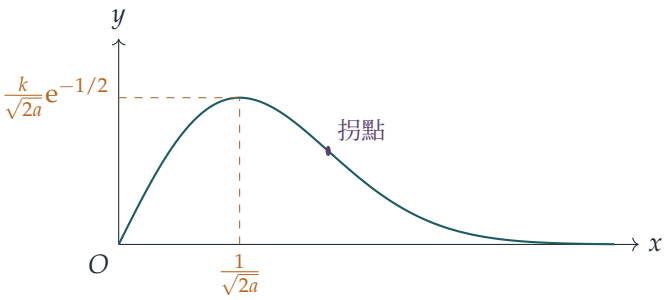
解答

草圖

設 $g(x)=kxe^{-ax^2}$，其中 $x\geq 0$。則 $g(0)=0$，當 $x>0$ 時 $g(x)>0$，而且由積法則（product rule）可得

$$g'(x)=ke^{-ax^2}(1-2ax^2),$$

它在 $0\leq x<1/\sqrt{2a}$ 時為正，其後為負。所以 g 由原點開始上升（在該處的斜率為 k），在 $x=1/\sqrt{2a}$ 達到唯一的極大值，此時 $y=\dfrac{k}{\sqrt{2a}}e^{-1/2}$，然後下降。當 $x\to\infty$ 時，指數因子壓倒線性因子，所以 $y\to 0$：x 軸是漸近線（asymptote）。（再求導一次可知曲線在 $x=\sqrt{3/(2a)}$ 有一個拐點（point of inflection），曲線在該處由凹（concave）轉為凸（convex）。）



常數 k

由於 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{-ax^2} = -2axe^{-ax^2}$，對於 $0 \le t \le 1$，

$$\int_0^t kxe^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{k}{2a}e^{-ax^2}\right]_0^t = \frac{k}{2a}(1-e^{-at^2}).$$

總概率為 1，所以取 $t=1$ 可得 $\dfrac{k}{2a}(1-e^{-a}) = 1$，即

$$k = \frac{2a}{1-e^{-a}},$$

這正是所需的結果。（因為 $a > 0$，所以分母為正。）把這個值代回去，在 $[0,1]$ 上的累積分佈函數為

$$F(t) = P(X \le t) = \frac{1-e^{-at^2}}{1-e^{-a}}.$$

眾數

概率密度函數（density）就是我們剛才所畫的曲線，在 $x=1$ 處截斷。從草圖可見，在 $[0,1]$ 上，如果轉向點（turning point）位於區間之內，密度便在該點最大，否則在區間的右端點最大。

- 若 $a > \frac{1}{2}$，則 $2a > 1$，所以 $1/\sqrt{2a} < 1$：頂點位於區間之內，故 $m = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$。
- 若 $a < \frac{1}{2}$，則 $1/\sqrt{2a} > 1$，所以在整個 $[0,1)$ 上 $f'(x) > 0$：密度在整個區間上遞增，故 $m = 1$。

（當 $a = \frac{1}{2}$ 時，兩條公式都給出 $m = 1$。）

中位數

中位數 h 滿足 $F(h) = \frac{1}{2}$：

$$1-e^{-ah^2} = \tfrac{1}{2}\left(1-e^{-a}\right) \quad\Longleftrightarrow\quad e^{-ah^2} = \frac{1+e^{-a}}{2}.$$

取對數，並利用 $h > 0$，

$$h = \sqrt{\frac{1}{a}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-a}}\right)}.$$

由於 $1+\mathrm{e}^{-a} < 2$，對數為正，所以這是一個實數。

何時 $h > m$？

若 $a \le \frac{1}{2}$，則 $m = 1$，而 $h < 1$（一半的概率在 h 以下，而 1 以上則沒有概率），所以 $h < m$。因此只有當 $a > \frac{1}{2}$ 時才可能有 $h > m$，而此時 $m = 1/\sqrt{2a}$。比較兩者的平方（兩者皆為正），

$$\begin{aligned} h > m &\iff \frac{1}{a}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-a}}\right) > \frac{1}{2a} \iff \ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-a}}\right) > \frac{1}{2} \\ &\iff \frac{2}{1+\mathrm{e}^{-a}} > \mathrm{e}^{1/2} \iff 1+\mathrm{e}^{-a} < 2\mathrm{e}^{-1/2} \\ &\iff \mathrm{e}^{-a} < 2\mathrm{e}^{-1/2} - 1 \iff a > -\ln\left(2\mathrm{e}^{-1/2}-1\right). \end{aligned}$$

第一步我們乘以 $a > 0$，第三步用到 exp 是遞增函數，最後一步用到 ln 是遞增函數。最後一步還需要 $2\mathrm{e}^{-1/2} - 1 > 0$，這是成立的，因為 $\mathrm{e}^{1/2} < 2$（因為 $\mathrm{e} < 4$）。

想一想 以上一連串的推導假設了 $a > \frac{1}{2}$。結論不是需要把它列為額外條件嗎？

不需要，而這正是下一部分要求證明它的原因。我們在下面會證明 $c = -\ln\left(2\mathrm{e}^{-1/2} - 1\right)$ 大於 $\frac{1}{2}$。所以若 $a > c$，則自動有 $a > \frac{1}{2}$，公式 $m = 1/\sqrt{2a}$ 適用，而上述推導說明 $h > m$。連同 $a \le \frac{1}{2}$ 的情況，這就證明了 $h > m$ 當且僅當 $a > c$。

該常數大於 $\frac{1}{2}$

由於 ln 是遞增函數，

$$-\ln\left(2\mathrm{e}^{-1/2}-1\right) > \tfrac{1}{2} \iff 2\mathrm{e}^{-1/2} - 1 < \mathrm{e}^{-1/2} \iff \mathrm{e}^{-1/2} < 1,$$

而最後一個不等式成立。（數值上，$c \approx 1.546$。）

條件概率

假設 $a > c$。則 $m < h$，所以事件 $\{X > m\} \cap \{X < h\}$ 就是事件 $\{m < X < h\}$。由於 $P(X < h) = \frac{1}{2}$，

$$P(X > m \mid X < h) = \frac{P(m < X < h)}{P(X < h)} = \frac{F(h) - F(m)}{\frac{1}{2}} = 1 - 2F(m).$$

當 $m = 1/\sqrt{2a}$ 時，$am^2 = \frac{1}{2}$，所以 $F(m) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-1/2}}{1 - \mathrm{e}^{-a}}$。因此

$$P(X > m \mid X < h) = \frac{(1 - \mathrm{e}^{-a}) - 2(1 - \mathrm{e}^{-1/2})}{1 - \mathrm{e}^{-a}} = \frac{2\mathrm{e}^{-1/2} - \mathrm{e}^{-a} - 1}{1 - \mathrm{e}^{-a}},$$

這正是所需的結果。

驗算

- 當 $a = c$ 時，分子 $2\mathrm{e}^{-1/2} - \mathrm{e}^{-a} - 1$ 恰好為 0，與該處 $m = h$ 吻合；當 $a > c$ 時它為正，符合概率應有的性質。
- 當 $a \to \infty$ 時，答案趨向 $2\mathrm{e}^{-1/2} - 1 \approx 0.213$，小於 1。
- 取 $a = 2.5$：$k \approx 5.447$，$m \approx 0.447$，$h \approx 0.496$，而對密度作數值積分可得 $P(X > m \mid X < h) \approx 0.1427$，與公式一致。取 $a = 1$ 則得 $m \approx 0.707 > h \approx 0.616$，與 $1 < c$ 相符。

常見錯誤

- 在所有情況下都答 $m = 1/\sqrt{2a}$：當 $a < \frac{1}{2}$ 時，轉向點落在 $x = 1$ 之外，而該處的密度為零。
- 忘記 F 裏面的 k 必須是歸一化後的值，才能使 $F(1) = 1$。
- 寫成 $P(X > m \mid X < h) = P(X > m)/P(X < h)$；分子必須是兩個事件同時發生的概率。

STEP 之外

這個密度是截斷瑞利分佈（truncated Rayleigh distribution）：若不在 $x = 1$ 處截斷，取 $k = 2a$ 的 $kx\mathrm{e}^{-ax^2}$ 就是一個點與原點距離的分佈，而該點的兩個坐標是互相獨立的正態變量（normal variables）。比較平均值（mean）、中位數和眾數，以及截斷如何使它們移動，是大學第一門統計課程中反覆出現的主題。Grimmett and Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率入門教材）是進一步了解連續隨機變量（continuous random variables）及其密度函數和分佈函數的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。