詳細解答

STEP II 2004，第 11 題

力學 • 功率與阻力

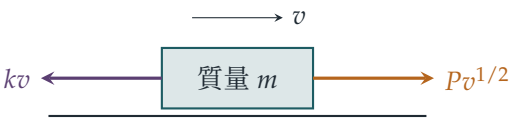
> **STEP II 2004，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q11

關鍵思路

功率 (power) 等於力乘以速率，所以引擎以全功率 $Pv^{3/2}$ 運作時，所施的推力為 $Pv^{1/2}$。由牛頓第二定律（Newton's second law）便得到一條含有 $\sqrt{v}$ 的微分方程（differential equation），而代換（substitution）$u = \sqrt{v}$ 可把它化為一階線性方程（linear first-order equation），馬上就能解出。引擎關掉之後，兩列火車的速率各自按指數衰減（exponential decay），而第 (iii) 部分的竅門就是比較這兩個衰減率。

解答

我們把每列火車看成沿水平直路軌運動的質點（particle）。引擎以全功率開動時，沿路軌方向的力有驅動力（driving force）和阻力（resistance）kv。



若引擎在速率為 v 時輸出的功率為 H，則其驅動力為 H/v。所以在全功率下，A 所受的驅動力為 $Pv^{3/2}/v = Pv^{1/2}$，而 B 所受的驅動力為 $2Pv^{1/2}$。

第 (i) 部分

對於 A，沿路軌方向應用牛頓第二定律，得

$$m\frac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t} = Pv_A^{1/2} - kv_A.$$

設 $u = v_A^{1/2}$，則 $v_A = u^2$，且 $\dfrac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t} = 2u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$。於是

$$2mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Pu - ku^2, \qquad \text{所以} \qquad 2m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = P - ku,$$

這裏兩邊除以 u；由於火車一直在運動（$u > 0$），這樣做是容許的。這是一條線性（而且可分離變數（separable））的方程：

$$\int \frac{2m\,\mathrm{d}u}{P - ku} = \int \mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad -\frac{2m}{k}\ln(P - ku) = t + \text{常數},$$

所以 $P - ku = \mathrm{C}\mathrm{e}^{-kt/2m}$，其中 C 為某個常數。（開始時 u 極小，故 $P - ku > 0$；而且它一直保持為正，因為解永遠不會到達平衡值（equilibrium）$u = P/k$。）

想一想 「以極低的速率緩緩前進」告訴了我們甚麼？

它給出了初始條件（initial condition）。在 $t = 0$ 時，兩個速率都是正數（所以除以 u 並無問題），但小得可以忽略，因此我們取 $t = 0$ 時 $u = 0$。於是 $C = P$，而

$$u = \frac{P}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt/2m}\right), \qquad \text{所以} \qquad v_A = \frac{P^2\left(1 - \mathrm{e}^{-kt/2m}\right)^2}{k^2},$$

正是所要求的結果。（假如火車完全靜止，$v \equiv 0$ 也會滿足原來的方程，因為那時根本沒有驅動力；這就是題目要讓火車一開始已在緩慢移動的原因。）

對於 B，方程是 $2m\dfrac{\mathrm{d}v_B}{\mathrm{d}t} = 2Pv_B^{1/2} - kv_B$。用同一個代換可得 $4m\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2P - ku$，這正是 A 的方程，只是把 P 換成 $2P$、m 換成 $2m$。所以

$$v_B = \frac{4P^2\left(1 - \mathrm{e}^{-kt/4m}\right)^2}{k^2}.$$

第 (ii) 部分

兩個速率都是正數，所以 $9v_A = 4v_B$ 等價於 $3\sqrt{v_A} = 2\sqrt{v_B}$。設 $x = \mathrm{e}^{-kt/4m}$，則 $\mathrm{e}^{-kt/2m} = x^2$，而且當 $t > 0$ 時 $0 < x < 1$。條件變成

$$\frac{3P}{k}\left(1 - x^2\right) = \frac{4P}{k}(1 - x) \quad \Longrightarrow \quad 3(1 - x)(1 + x) = 4(1 - x).$$

由於 $x \neq 1$，我們可以除以 $1 - x$，得 $3 + 3x = 4$，所以 $x = \frac{1}{3}$（即 $t = \frac{4m}{k}\ln 3$）。於是 $1 - x^2 = \frac{8}{9}$，$1 - x = \frac{2}{3}$，所以

$$v_A = \frac{64P^2}{81k^2}, \qquad v_B = \frac{16P^2}{9k^2}.$$

簡單驗算一下：$9v_A = \frac{64P^2}{9k^2} = 4v_B$。

第 (iii) 部分

從引擎關掉的一刻起計算時間 τ，並設 $V_A = \frac{64P^2}{81k^2}$ 和 $V_B = \frac{16P^2}{9k^2}$ 為該刻的速率。這時只有阻力起作用：

$$m\frac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}\tau} = -kv_A, \qquad 2m\frac{\mathrm{d}v_B}{\mathrm{d}\tau} = -kv_B,$$

所以

$$v_A = V_A\,\mathrm{e}^{-k\tau/m}, \qquad v_B = V_B\,\mathrm{e}^{-k\tau/2m}.$$

較重的火車 B 減速的指數率只有一半，所以把 v_B 平方，兩個指數項便一致了：

$$v_B^2 = V_B^2\,\mathrm{e}^{-k\tau/m} = \frac{V_B^2}{V_A}\,v_A.$$

最後

$$\frac{V_B^2}{V_A} = \frac{256P^4}{81k^4}\cdot\frac{81k^2}{64P^2} = \frac{4P^2}{k^2},$$

所以 $v_B^2 = \dfrac{4P^2}{k^2}v_A$，即在其後的所有時刻都有 $k^2v_B^2 = 4P^2v_A$，正是所要求的結果。

驗算

- 當 $t \to \infty$ 時，$v_A \to P^2/k^2$，這正是驅動力 $Pv^{1/2}$ 與阻力 kv 相等之處。同樣地，$v_B \to 4P^2/k^2$，那裏 $2Pv^{1/2} = kv$。
- 當 t 很小時，$v_A \approx P^2t^2/(4m^2)$，$v_B \approx P^2t^2/(4m^2)$：兩列火車起步時並駕齊驅，這是應有的結果，因為兩者每單位質量的驅動力都是 $Pv^{1/2}/m$。
- 取 $m = 1.7$、$P = 2.3$、$k = 0.9$，我們由一個極小的初速率出發，用數值方法（龍格—庫塔法（Runge–Kutta））逐步計算兩條運動方程，結果與第 (i) 部分的公式吻合至約 10^{-5}；在 $9v_A = 4v_B$ 的一刻，得 $\mathrm{e}^{-kt/4m} = 0.33333$、$v_A = 5.1602$ 和 $v_B = 11.6104$；關掉引擎後繼續逐步計算，$k^2v_B^2$ 一直與 $4P^2v_A$ 相等（例如兩秒後兩者都是 37.8739）。

常見錯誤

- 把 $Pv^{3/2}$ 當作力。它是功率；力等於功率除以速率。
- 忘記第 (ii) 部分的條件是一條關於 $x = \mathrm{e}^{-kt/4m}$ 的二次方程，除了 $x = \frac{1}{3}$ 之外，還有根 $x = 1$（即 $t = 0$，此時兩個速率皆為零）。

STEP 之外

代換 $u = \sqrt{v}$ 是求解伯努利方程（Bernoulli equation）$y' + p(t)y = q(t)y^n$ 的方法的一個特例；在該方法中，$u = y^{1-n}$ 總能給出一條線性方程。關於火車完全靜止的那個備註，讓我們初次窺見唯一性理論（uniqueness theory）：由於 $\sqrt{v}$ 在 $v = 0$ 處的斜率為無窮大，方程由 $v = 0$ 出發的解不止一個，皮卡－林德勒夫定理（Picard–Lindelöf theorem）解釋了這個現象。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教材）涵蓋了這兩個課題；至於功率與阻力的力學，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。