詳細解答

STEP II 2004，第 10 題

力學 • 斜面上的摩擦力

> **STEP II 2004，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q10

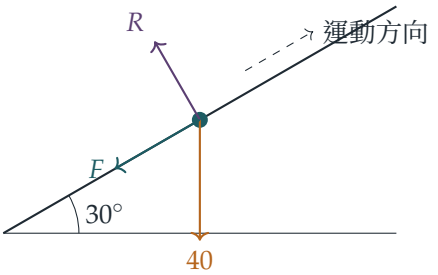
關鍵思路

摩擦力（friction）永遠與運動方向相反，所以質點（particle）沿斜面向上滑與向下滑時的加速度（acceleration）並不相同。先求出這兩個加速度：題目的數字經過挑選，結果十分整齊。然後 P 向上滑到停下，再滑回來，與仍在向上滑的 Q 相遇。把兩個質點的位置都寫成「在最高點以下的距離」，碰撞（collision）方程就成為一個平方差（difference of two squares）。

（印刷試卷的第 (i) 部分有一處誤植：碰撞時間中的「b」應為 T。）

解答

我們把每個質點視為粗糙斜面（rough plane）上的質點，並以 x 表示由 A 沿 ℓ 向上量度的位置，取沿斜面向上為正方向。



垂直於斜面的方向沒有加速度，所以法向反作用力（normal reaction）為

$$R = 4 \cdot 10 \cos 30^\circ = 20\sqrt{3}\ \text{N},$$

而由於每個質點都在滑動，摩擦力達到極限值（limiting friction）：

$$F = \mu R = \frac{1}{5\sqrt{3}} \cdot 20\sqrt{3} = 4\,\text{N}.$$

重量沿斜面向下的分量是 $40\sin 30^\circ = 20\,\text{N}$。

向上運動時：摩擦力沿斜面向下，所以 $4a = -(20+4)$，減速度為 $6\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$。

向下運動時：摩擦力沿斜面向上，所以沿斜面向下的加速度為 $(20-4)/4 = 4\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$。

由於 $20 > 4$，質點停下後不會保持靜止：極限摩擦力不足以把它留住，所以它會滑回下來。

第 (i) 部分

P 的運動。向上時，$v = 6 - 6t$，所以 P 在 $t = 1$ 停下，此時已走了 $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 = 3\,\text{m}$。當 $0 \le t \le 1$ 時，$x_P = 6t - 3t^2 = 3 - 3(1-t)^2$。其後 P 由 $x = 3$ 從靜止開始以加速度 4 向下滑，所以

$$x_P = 3 - 2(t-1)^2 \qquad (t \ge 1),$$

此式一直成立，直至 P 回到 A，那時 $2(t-1)^2 = 3$，即 $t = 1 + \sqrt{3/2}$。

Q 的運動。與上述運動完全相同，只是時間推遲了 T：設 $u = t - T$，則

$$x_Q = 6u - 3u^2 = 3 - 3(1-u)^2 \qquad (0 \le u \le 1).$$

想一想 兩個質點會否在都仍向上運動時碰撞？

不會。當兩者都向上運動時，Q 所走的正是 P 在 T 秒之前走過的路徑，而沿這條路徑 x 是遞增的，所以 P 嚴格地在前面。它們只可能在 P 掉頭之後相遇，即 $t \ge 1$ 之時。此外，Q 也不可能先到達自己的最高點（$x = 3$，在 $u = 1$ 時），因為那時 P 早已離開 $x = 3$，位於其下方。所以碰撞時 P 正在下滑，而 Q 正在上滑。

碰撞。設 $\tau = t - 1 \ge 0$ 為 P 掉頭後所經過的時間。那麼 $1 - u = 1 - (t - T) = T - \tau$，而由 $x_P = x_Q$ 得

$$2\tau^2 = 3(T-\tau)^2.$$

τ 和 $T - \tau = 1 - u$ 都是非負的（後者是因為 Q 仍在向上運動），所以可以取正平方根：

$$\sqrt{2}\,\tau = \sqrt{3}\,(T - \tau)$$

$$\tau = \frac{\sqrt{3}\,T}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\,T = (3-\sqrt{6})\,T,$$

其中利用 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 1$ 作有理化（rationalising）。因此碰撞發生在 P 拋出後

$$t = (3-\sqrt{6})\,T + 1$$

秒，正如所求。

餘下要看看關於 T 的條件在哪裏用到。這個時刻必須早於 P 回到 A 的時刻，所以需要 $\tau < \sqrt{3/2}$：

$$(3-\sqrt{6})\,T < \sqrt{\tfrac{3}{2}} \iff T < \frac{\sqrt{3/2}\,(3+\sqrt{6})}{3} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \tfrac{\sqrt{9}}{3} = 1 + \sqrt{\tfrac{3}{2}},$$

因為 $\sqrt{3/2}\cdot\sqrt{6} = 3$。這正是題目給出的條件。（同一個不等式亦保證 $t \geq T$，即 Q 已經拋出：$(3-\sqrt{6})T + 1 \geq T \iff T \leq 1/(\sqrt{6}-2) = 1+\sqrt{3/2}$。）

第 (ii) 部分

當 $T = 1+\sqrt{2/3}$ 時，

$$\tau = (3-\sqrt{6})\left(1+\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = 3 - \sqrt{6} + 3\sqrt{\tfrac{2}{3}} - \sqrt{6}\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 3 - \sqrt{6} + \sqrt{6} - 2 = 1,$$

所以碰撞發生在 $t = 2$。這個 T 值小於 $1+\sqrt{3/2}$，所以第 (i) 部分的結果適用。

因摩擦而損失的能量等於摩擦力乘以滑行的總距離，因為摩擦力的大小恆為 4 N，而且永遠與運動方向相反。

- P 向上滑了 3 m，然後向下滑了 $2\tau^2 = 2$ m：合共 5 m。
- Q 尚未掉頭，並且與 P 位於同一點，即 $x = 3-2 = 1$：它滑行了 1 m。

所以損失的能量是

$$4 \times (5+1) = 24\,\text{J}.$$

驗算

用能量收支可以核實這個答案。起初的動能（kinetic energy）是 $2 \times \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot 6^2 = 144$ J。在 $t = 2$ 時，P 的速率是 $4 \times 1 = 4$（動能 32 J）；Q 有 $u = 1-\sqrt{2/3}$，速率為 $6(1-u) = 6\sqrt{2/3}$，所以 $v^2 = 24$（動能 48 J）。兩者都在斜面上 1 m 處，即升高了 $\frac{1}{2}$ m，勢能（potential energy）增加了 $2 \times 4 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 40$ J。而 $144 - 32 - 48 - 40 = 24$ J。另外，對隨機選取的 $T < 1+\sqrt{3/2}$，以數值方法逐步模擬兩個質點的運動，所得的碰撞時間與 $(3-\sqrt{6})T+1$ 吻合（例如當 $T \approx 1.816$ 時為 ≈ 2.000），因摩擦而損失的能量為 24.000 J。

常見錯誤

- P 向下滑時沿用向上滑時的加速度：摩擦力的方向已經逆轉，所以應是 4，而不是 6。
- 忘記了 Q 所受的摩擦力：Q 也一直在滑動，它滑行的 1 m 貢獻了 4 J。
- 在 $2\tau^2 = 3(T-\tau)^2$ 中取錯平方根：正負號由 $\tau \geq 0$ 和 $T - \tau \geq 0$ 決定。

STEP 之外

摩擦力是非保守力（non-conservative force）最簡單的例子：它所作的功取決於路徑，而不僅取決於起點和終點，這就是為甚麼我們需要的是滑行的總距離，而不是位移。這也解釋了為甚麼機械能（mechanical energy）在某些系統中守恆，在另一些系統中卻不守恆；大學一年級的力學課程會用線積分（line integral）和勢函數（potential）把這個想法嚴格地表述出來。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對功、保守力和摩擦力有仔細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。