詳細解答

# STEP II 2004，第 1 題

純數學 • 含根式的方程

> **STEP II 2004，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q1

## 關鍵思路

每一條方程都含有 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{3x^2+1}$，所以設 $t=\sqrt{x}$（其中 $t\geq 0$），把前者化為多項式（polynomial）。然後把餘下的平方根單獨移到一邊，平方一次。這樣會得到一條關於 $t$ 的四次方程（quartic），而且很容易因式分解（factorise），因為 $t=0$ 和 $t=1$ 必定是根。真正要花工夫的是最後一步：平方可能引入增根（false roots），所以我們只保留那些令被平方的一邊不是負數的根。

## 解答

三條方程都需要 $x\geq 0$，$\sqrt{x}$ 才是實數，所以我們寫 $x=t^2$，其中 $t\geq 0$。於是 $\sqrt{x}=t$，而 $3x^2+1=3t^4+1$。

平方這一步只在一個方向上成立。對於實數 $A$ 和 $B$，

$$\sqrt{A}=B \iff A=B^2 \text{ 且} B\geq 0.$$

所以平方之後，我們必須檢查右邊在每一個根處是否非負。

### 第 (i) 部分

把根式單獨移到一邊，得

$$\sqrt{3t^4+1}=2t^2-t+1.$$

右邊恆為正數：它的判別式(discriminant)是 $1-8<0$，而首項係數(leading coefficient)是正數。所以在這裏平方不會有任何損失，平方後所得方程的每一個根都是真正的解。

平方得

$$3t^4+1=(2t^2-t+1)^2=4t^4-4t^3+5t^2-2t+1,$$
$$0=t^4-4t^3+5t^2-2t=t\,(t^3-4t^2+5t-2).$$

這個三次式在 $t=1$ 時等於零（因為 $1-4+5-2=0$），除去因式 $t-1$ 後得

$$t^3-4t^2+5t-2=(t-1)(t^2-3t+2)=(t-1)^2(t-2).$$

所以 $t\,(t-1)^2(t-2)=0$，得 $t=0,1,2$。三個值都是非負的，所以

$$x=0,\quad x=1,\quad x=4.$$

驗算一下：當 $x=4$ 時，我們得到 $\sqrt{49}+2-8-1=0$。

**第 (ii) 部分**

現在我們有

$$\sqrt{3t^4+1}=-t^2+2t+1.$$

平方得

$$3t^4+1=(-t^2+2t+1)^2=t^4-4t^3+2t^2+4t+1,$$
$$0=2t^4+4t^3-2t^2-4t=2t\,(t^3+2t^2-t-2).$$

把三次式的各項分組為 $t^2(t+2)-(t+2)$，得

$$2t\,(t+2)(t-1)(t+1)=0.$$

由於 $t\geq 0$，只剩下 $t=0$ 和 $t=1$。右邊 $-t^2+2t+1$ 在這兩處的值分別是 1 和 2，都是正數，所以兩個根都是真正的解：

$$x=0,\quad x=1.$$

**第 (iii) 部分**

這一次

$$\sqrt{3t^4+1}=t^2+2t-1.$$

平方得

$$3t^4+1=(t^2+2t-1)^2=t^4+4t^3+2t^2-4t+1,$$
$$0=2t^4-4t^3-2t^2+4t=2t\,(t^3-2t^2-t+2).$$

把三次式分組為 $t^2(t-2)-(t-2)$，得

$$2t\,(t-2)(t-1)(t+1)=0.$$

非負的根是 $t=0,1,2$。

**想一想** 這三個值是否全都滿足原來的方程？

不是。當 $t = 0$ 時，右邊 $t^2 + 2t - 1$ 等於 $-1$，但平方根不可能是負數。所以 $t = 0$ 是增根，是由平方引入的。（直接驗證：當 $x = 0$ 時，(iii) 的左邊是 $1 - 0 - 0 + 1 = 2 \neq 0$。）當 $t = 1$ 和 $t = 2$ 時，右邊分別是 2 和 7，都是正數，所以這兩個根是真正的解。因此

$$x = 1, \quad x = 4.$$

(ii) 和 (iii) 之間有一個巧妙的聯繫。把 $t$ 換成 $-t$，$-t^2 + 2t + 1$ 就變成 $-(t^2 + 2t - 1)$，而平方會消去負號。所以 (iii) 中平方後的方程，就是把 (ii) 中平方後的方程的 $t$ 換成 $-t$ 所得的方程，它的根 $0, \pm 1, 2$ 正是 (ii) 的根 $0, \pm 1, -2$ 的相反數。

## 驗算

把每個答案代入原來的方程。例如，在 (iii) 中代入 $x = 4$，得 $\sqrt{49} - 4 - 4 + 1 = 0$。在 $0 \leq x \leq 50$ 的範圍內對每條方程的左邊作細密的數值掃描，沒有發現其他零點。在 (i) 中，左邊在 $x = 1$ 處觸及零但不變號，這與二重因式 $(t - 1)^2$ 吻合。

## 常見錯誤

- 忘記檢查被平方那一邊的正負號，因而在 (iii) 中保留了 $x = 0$。
- 除以 $t$（或除以 $\sqrt{x}$），因而在 (i) 和 (ii) 中漏掉了 $x = 0$ 這個根。
- 一邊仍有兩個平方根時就平方。應先把 $\sqrt{3x^2 + 1}$ 單獨移到一邊，這樣平方一次便能把它消去。

## STEP 之外

映射（map）$A \mapsto A^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上不是單射（injective），所以兩邊平方得到的只是蘊涵關係（implication），而不是等價關係（equivalence）。留意哪些步驟可逆，是每一個嚴謹解方程過程背後的習慣；到了分析學（analysis），這就變成「函數在甚麼時候有反函數（inverse）、在哪個定義域（domain）上有反函數」的問題。Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）對此有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。