詳細解答

STEP I 2004，第 9 題

力學 • 拋體運動

> **STEP I 2004，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q9

關鍵思路

第一部分是標準的「在最高點垂直速度為零」的計算。在隧道中，題目沒有給出速率 u，但它也不是任意的：一旦選定 θ，要求路徑通過 P 就確定了 u。因此我們消去 u，把最大高度寫成只含 θ 的函數（以 $t = \tan\theta$ 表示最為方便），再問它何時保持在隧道頂之下。答案最後化為一個關於 t 的二次不等式（quadratic inequality）。

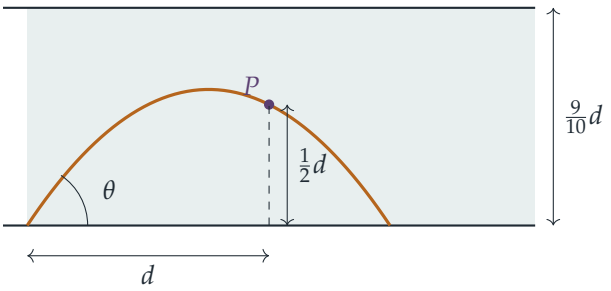
解答

最大高度

把粒子視為在重力作用下自由運動的質點，不計空氣阻力（air resistance）。取拋射點為原點建立坐標軸，x 軸水平，y 軸垂直向上。速度的垂直分量（vertical component）起初為 $u\sin\theta$，並有恆定加速度 $-g$。在最高點垂直速度為零，所以在垂直方向應用 $v^2 = v_0^2 + 2as$，得

$$0 = u^2\sin^2\theta - 2gH, \qquad \text{所以} \qquad H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}.$$

隧道



粒子的路徑可由 $x = uT\cos\theta$ 與 $y = uT\sin\theta - \frac{1}{2}gT^2$ 消去時間 T 而得：

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} = xt - \frac{gx^2(1+t^2)}{2u^2},$$

其中 $t = \tan\theta$，並用了 $\sec^2\theta = 1 + t^2$。

通過 P。 代入 $x = d$、$y = \frac{1}{2}d$，再除以 d：

$$\frac{1}{2} = t - \frac{gd(1+t^2)}{2u^2}, \qquad \text{所以} \qquad \frac{gd(1+t^2)}{2u^2} = t - \frac{1}{2}.$$

左邊為正數，所以必須有 $t > \frac{1}{2}$。（這是合理的：粒子起初朝 θ 方向運動，而重力只會把路徑向下彎，所以只有瞄準的方向高於通往 P 的直線時才能到達 P，而該直線的斜率為 $\frac{1}{2}$。）對每個這樣的 θ，恰好有一個速率符合要求：

$$u^2 = \frac{gd(1+t^2)}{2t-1}.$$

想一想 題目沒有給出 u 的值。條件怎麼可能只與 θ 有關？

因為速率並不由我們選擇：一旦 θ 固定，「通過 P」這個條件就把 u 確定下來。所以最大高度其實只是 θ 的函數。

不碰隧道頂。 把 $\sin^2\theta = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ 代入 H 的公式，

$$H = \frac{u^2}{2g}\cdot\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{d(1+t^2)}{2(2t-1)}\cdot\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{dt^2}{2(2t-1)}.$$

粒子不碰隧道頂，當且僅當 $H < \frac{9}{10}d$。由於 $2t-1 > 0$，我們可以把不等式兩邊同乘 $10(2t-1)/d$ 而不必改變不等號的方向：

$$\begin{aligned}\frac{dt^2}{2(2t-1)} < \frac{9d}{10} &\iff 5t^2 < 9(2t-1)\\ &\iff 5t^2 - 18t + 9 < 0\\ &\iff (5t-3)(t-3) < 0\\ &\iff \tfrac{3}{5} < t < 3.\end{aligned}$$

這個區間內的每個 t 都滿足 $t > \frac{1}{2}$，所以先前的條件沒有帶來額外限制。若 $t = \frac{3}{5}$ 或 $t = 3$，粒子剛好觸及隧道頂，這種情況被排除。由於粒子始終沒有碰到隧道頂，它會落回地面，並在隧道內着地。

最後，θ 介乎 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間，而 tan 在此範圍內遞增，所以

$$\arctan\tfrac{3}{5} < \theta < \arctan 3,$$

這正是所要證明的結果。

驗算

- 當 $t = 3$ 時：$H = \dfrac{9d}{2\cdot 5} = \frac{9}{10}d$；當 $t = \frac{3}{5}$ 時：$H = \dfrac{(9/25)d}{2\cdot(1/5)} = \frac{9}{10}d$。兩個端點都剛好擦過隧道頂，正如所料。
- 當 $t \to \frac{1}{2}^{+}$ 時，所需速率 $u \to \infty$，且 $H \to \infty$：粒子幾乎沿着通往 P 的直線運動，所以它必須非常快，其後亦會升得非常高。
- 數值方面，取 $d = 3$ 和 $g = 9.8$，我們測試了 10^5 個隨機角度。對每個角度，我們求出 u，確認路徑通過 P，並發現 $H < \frac{9}{10}d$ 當且僅當 $0.5404 < \theta < 1.2490$（即以弧度表示的 $\arctan 0.6$ 和 $\arctan 3$）。逐步模擬亦確認了 $H = u^2\sin^2\theta/(2g)$。

常見錯誤

- 把 u 當作另一個獨立的未知數，結果做不下去：必須利用在 P 的條件把它消去。
- 把不等式兩邊同乘 $2t-1$ 之前，忘記檢查它的正負。
- 只檢查 P 是否在隧道頂之下。路徑的最高點通常出現在 P 之後，所以真正重要的是最大高度。

STEP 之外

把軌跡（trajectory）以 $\tan\theta$ 表示，可將拋體（projectile）問題化為關於 t 的二次式。同一技巧可求出以給定速率拋射的所有軌跡的「包絡線」（envelope，即作為邊界的拋物線），並給出擊中目標的兩個可能角度。像這樣的問題，部分參數由約束條件確定，其餘參數則構成一個容許區域，由此可通往最優化（optimisation）和變分法（calculus of variations）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）是進一步學習這類力學的極佳讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。