詳細解答

STEP I 2004，第 8 題

純數學 • 單調數列與數學歸納法

STEP I 2004，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/04-s1-q8

關鍵思路

要證明一個數列（sequence）遞增，可把差 $t_{n+1} - t_n$ 看成 t_n 的函數。在兩部分中，這個差都可以因式分解，而所得的因式正好對應遞推關係（recurrence）的不動點（fixed point）2 和 3（即令 $t_{n+1} = t_n$ 的值）。於是差的正負只取決於 t_n 相對於 2 和 3 的位置，所以真正要下工夫的，是用歸納法（induction）證明每一項都留在適當的區域內。

解答

第 (i) 部分

對任意 n，

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 + 6}{5} - x_n = \frac{x_n^2 - 5x_n + 6}{5} = \frac{(x_n - 2)(x_n - 3)}{5}.$$

若 $x_n > 3$，則兩個因式皆為正，所以 $x_{n+1} - x_n > 0$，即 $x_{n+1} > x_n$。

餘下要驗證每一項都大於 3，我們用歸納法來證明。根據假設，命題 $x_n > 3$ 在 $n = 0$ 時成立。假設 $x_n > 3$。由上面的計算，$x_{n+1} > x_n > 3$，所以亦有 $x_{n+1} > 3$。因此對所有 $n \geq 0$ 都有 $x_n > 3$，從而對所有 $n \geq 0$ 都有 $x_{n+1} > x_n$：這個數列嚴格遞增（strictly increasing）。

? **想一想** 為甚麼只證明 $x_1 > x_0$ 並不足夠？

不等式 $x_{n+1} > x_n$ 是由 $x_n > 3$ 推導出來的，所以我們在每一步都需要這個條件，而不僅是第一步。在這裏，這個條件不費工夫便可得到：從大於 3 的位置再向上走一步，仍然大於 3。（留意若起始值恰好是 $x_0 = 3$，便會得到常數數列，所以嚴格不等式是必要的。）

第 (ii) 部分

首先留意，若 $2 < y_n < 3$，則 $y_n > 0$，所以 $y_{n+1} = 5 - 6/y_n$ 有定義。對這樣的 y_n，

$$y_{n+1} - y_n = 5 - \frac{6}{y_n} - y_n = -\frac{y_n^2 - 5y_n + 6}{y_n} = \frac{(y_n - 2)(3 - y_n)}{y_n},$$

此式為正，因為 $y_n - 2 > 0$、$3 - y_n > 0$ 及 $y_n > 0$。所以只要 $2 < y_n < 3$，便有 $y_{n+1} > y_n$。

與第 (i) 部分一樣，我們必須證明每一項都位於這個區間內。這次它不會自動成立，因為遞增的數列有可能越過 3。所以我們考察各項與 3 的距離：

$$3 - y_{n+1} = 3 - 5 + \frac{6}{y_n} = \frac{6 - 2y_n}{y_n} = \frac{2(3 - y_n)}{y_n}.$$

? **想一想** 我們怎樣知道這個數列永遠不會跳過 3？

上式說明，只要 $y_n > 0$，$3 - y_{n+1}$ 便與 $3 - y_n$ 同號。所以小於 3 的一項之後，緊接的一項必定也小於 3。

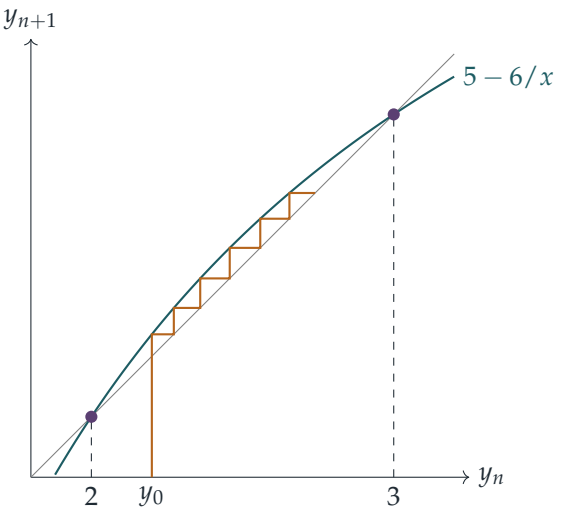
現在進行歸納。斷言：對所有 $n \geq 0$，$2 < y_n < 3$。根據假設，這在 $n = 0$ 時成立。假設 $2 < y_n < 3$。那麼：

- 由關於差的計算，$y_{n+1} > y_n > 2$；
- $3 - y_{n+1} = 2(3 - y_n)/y_n > 0$，因為 $3 - y_n > 0$ 及 $y_n > 0$，所以 $y_{n+1} < 3$。

因此 $2 < y_{n+1} < 3$，歸納完成。

由於對每個 n 都有 $2 < y_n < 3$，關於差的計算在每一步都適用，所以對所有 $n \geq 0$ 都有 $y_{n+1} > y_n$。這個數列嚴格遞增，但對所有 n 仍有 $y_n < 3$，正如所求。

蛛網圖（cobweb diagram）顯示了實際的情況：曲線 $y = 5 - 6/x$ 與直線 $y = x$ 相交於 $x = 2$ 和 $x = 3$，在兩者之間曲線位於直線上方，而各次迭代的值向着 3 攀升，卻始終達不到它。



驗算

- 在不動點處，遞推關係給出常數數列：$(3^2+6)/5 = 3$，以及 $5-6/3 = 3$、$5-6/2 = 2$，與因式 $(t-2)(t-3)$ 吻合。
- 由 $y_0 = 2.5$ 開始：$y_1 = 2.6$，$y_2 \approx 2.692$，$y_3 \approx 2.771$，遞增且小於 3；經過 200 步後，y_n 與 3 相差不超過 10^{-15}。由 $x_0 = 3.1$ 開始：$x_1 = 3.122$，$x_2 \approx 3.149$，遞增。
- 我們用電腦以精確分數對數百個隨機起始值檢驗了兩個歸納論證，並確認當 x_0 略小於 3 時會得到 $x_1 < x_0$，所以條件 $x_0 > 3$ 是必需的。

常見錯誤

- 在假設 $x_n > 3$ 之下證明了 $x_{n+1} > x_n$ 便停下來，沒有用歸納法證明每一項都大於 3。
- 在第 (ii) 部分，證明了 $y_{n+1} < 3$，卻忘記要繼續歸納還需要 $y_{n+1} > 2$（它可由 $y_{n+1} > y_n$ 推出）。
- 把不等式兩邊同乘以 y_n，卻沒有指出 $y_n > 0$。

STEP 之外

第 (ii) 部分的數列是有界的遞增數列，而數學分析中的單調收斂定理（monotone convergence theorem）指出，這樣的數列必定收斂；任何極限 L 都滿足 $L = 5-6/L$，所以這裏 $y_n \to 3$。在第 (i) 部分，數列遞增而且無上界，因為有限的極限必須是一個大於

3 的不動點，而這樣的不動點並不存在。迭代的值究竟被不動點吸引還是排斥，取決於映射在該點的斜率，這正是離散動力系統（discrete dynamical systems）理論的起點。Abbott 的 *Understanding Analysis* 對單調收斂有嚴謹細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。