詳細解答

STEP I 2004，第 7 題

純數學 • 生成函數

> **STEP I 2004，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q7

關鍵思路

線性遞推關係（linear recurrence）與冪級數（power series）是同一個對象的兩種描述。把級數乘以 $1-7x+10x^2$，每個係數 a_n 便會與 a_{n-1} 和 a_{n-2} 對齊，於是遞推關係令乘積中幾乎所有係數都變為零。剩下來的是一個多項式，所以 f 是有理函數（rational function）。接着利用部分分式（partial fractions）和幾何級數（geometric series），便可直接得出 a_n。第 (ii) 部分用的是同一套方法，只需先由已知數值求出 p 和 q。

解答

第 (i) 部分

當 $|x|<\frac{1}{5}$ 時，級數收斂（converge），所以我們可以把級數乘以 x 的冪，並逐項相加：

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x) &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n,\\ -7x\,\mathrm{f}(x) &= -7a_0 x - \sum_{n=2}^{\infty} 7a_{n-1}x^n,\\ 10x^2\mathrm{f}(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} 10a_{n-2}x^n.\end{aligned}$$

（在第二行和第三行，我們重新標記了求和指標，使每個和式都是對 x^n（$n\geq 2$）求和。）相加得

$$\mathrm{f}(x) - 7x\,\mathrm{f}(x) + 10x^2\mathrm{f}(x) = a_0 + (a_1 - 7a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty}(a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2})x^n.$$

根據遞推關係，和式中每個括號都等於零，而 $a_0 = 2$，$a_1 - 7a_0 = 7 - 14 = -7$。所以

$$(1 - 7x + 10x^2)\,\mathrm{f}(x) = 2 - 7x.$$

現在 $1 - 7x + 10x^2 = (1 - 2x)(1 - 5x)$，當 $|x| < \frac{1}{5}$ 時不等於零，所以可以相除：

$$\mathrm{f}(x) = \frac{2 - 7x}{(1 - 2x)(1 - 5x)}.$$

分子正好是兩個因式之和，$(1 - 5x) + (1 - 2x) = 2 - 7x$，所以

$$\mathrm{f}(x) = \frac{(1 - 5x) + (1 - 2x)}{(1 - 2x)(1 - 5x)} = \frac{1}{1 - 2x} + \frac{1}{1 - 5x},$$

正如所求。

當 $|x| < \frac{1}{5}$ 時，我們有 $|2x| < 1$ 和 $|5x| < 1$，所以兩個分式都是收斂幾何級數之和：

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 5^n)x^n.$$

想一想 為甚麼現在可以直接讀出 a_n？

我們有兩個冪級數，它們對區間 $|x| < \frac{1}{5}$ 內的每個 x 都相等。冪級數由它在 0 附近的值決定：它的係數可以由 $a_n = \mathrm{f}^{(n)}(0)/n!$ 還原出來。所以兩者的係數必定相同，於是

$$a_n = 2^n + 5^n \quad \text{對所有} n \geq 0.$$

（簡單驗算一下：$a_0 = 1 + 1 = 2$，$a_1 = 2 + 5 = 7$。）

第 (ii) 部分

首先要求出 p 和 q。把 $n = 2$ 和 $n = 3$ 代入遞推關係：

$$\begin{aligned} b_2 = pb_1 + qb_0: &\quad 40 = 10p + 5q, \quad \text{所以} 2p + q = 8; \\ b_3 = pb_2 + qb_1: &\quad 100 = 40p + 10q, \quad \text{所以} 4p + q = 10. \end{aligned}$$

兩式相減，得 $2p = 2$，所以 $p = 1$ 及 $q = 6$。遞推關係是 $b_n = b_{n-1} + 6b_{n-2}$。

與第 (i) 部分完全一樣，乘以 $1 - x - 6x^2$ 會消去由 x^2 起的所有係數：

$$(1 - x - 6x^2)\,\mathrm{g}(x) = b_0 + (b_1 - b_0)x = 5 + 5x.$$

由於 $1 - x - 6x^2 = (1 - 3x)(1 + 2x)$，當 $|x| < \frac{1}{3}$ 時不等於零，

$$\mathrm{g}(x) = \frac{5 + 5x}{(1 - 3x)(1 + 2x)} = \frac{A}{1 - 3x} + \frac{B}{1 + 2x},$$

其中 $5+5x = A(1+2x)+B(1-3x)$。代入 $x=\frac{1}{3}$ 得 $\frac{20}{3}=\frac{5}{3}A$，所以 $A=4$；代入 $x=-\frac{1}{2}$ 得 $\frac{5}{2}=\frac{5}{2}B$，所以 $B=1$。因此

$$\mathrm{g}(x)=\frac{4}{1-3x}+\frac{1}{1+2x}.$$

當 $|x|<\frac{1}{3}$ 時，我們有 $|3x|<1$ 和 $|2x|<1$，所以把兩者都展開成幾何級數，

$$\mathrm{g}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(4\cdot 3^n+(-2)^n)x^n,$$

再如前比較係數，

$$b_n=4\cdot 3^n+(-2)^n.$$

驗算

這些公式與已知數值吻合：$4+1=5$，$12-2=10$，$36+4=40$，$108-8=100$。由遞推關係逐項計算 a_n 和 b_n 直至 $n=39$，結果與 2^n+5^n 和 $4\cdot 3^n+(-2)^n$ 完全一致。數值上，在 $x=0.1$ 時，級數的部分和（partial sums）給出 f 的值為 3.25，g 的值為 6.547619…，與 $\frac{1}{0.8}+\frac{1}{0.5}=3.25$ 和 $\frac{4}{0.7}+\frac{1}{1.2}=\frac{275}{42}$ 相符。

常見錯誤

- 忘記遞推關係只由 $n=2$ 起成立：乘積中的 x^0 項和 x^1 項必須另行計算，而它們正好給出分子。
- 在第 (ii) 部分，在 p 和 q 仍然未知時便使用遞推關係，或把分子寫成 b_0+b_1x 而不是 $b_0+(b_1-pb_0)x$。
- 因式分解 $1-x-6x^2$ 時弄錯正負號，結果得出 3^n 和 2^n，而不是 3^n 和 $(-2)^n$。

STEP 之外

級數 f 稱為數列 (a_n) 的*生成函數*（generating function），而這個方法適用於任何常係數線性遞推關係：分母總是由遞推關係構造出來，而它的因式則給出「特徵根」（characteristic roots）（這裏是 2 和 5）。生成函數是組合數學（combinatorics）和概率論的核心工具；在概率論中，概率生成函數（probability generating functions）把隨機變量之和化為乘積。「相等的冪級數有相等的係數」這一步，要在大學第一門分析課程中才有嚴格的論證；關於冪級數及其唯一性，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。