詳細解答

STEP I 2004，第 6 題

純數學 • 三角形的向量幾何

> **STEP I 2004，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q6

關鍵思路

以位置向量（position vector）代替分開處理的 x 坐標和 y 坐標：設 $\mathbf{a} = (p_1, q_1)$、$\mathbf{b} = (p_2, q_2)$、$\mathbf{c} = (p_3, q_3)$，則 H 的位置向量為 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$。這樣，題目中每一條直線都有簡短的向量描述，而「互相垂直」就變成「純量積（scalar product）為零」。出現的純量積是一個平方差（difference of two squares）：$(\mathbf{c} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b})$，而題目的後半部分就全在於此。

解答

我們假設 A、B、C 不共線（collinear），因而構成一個真正的三角形（否則第一部分的直線可能重合，便沒有唯一的交點）。

中線相交

設 L、M、N 分別為 BC、CA、AB 的中點（midpoint），其位置向量為

$$\mathbf{l} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}), \qquad \mathbf{m} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}), \qquad \mathbf{n} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

直線 AL 上的一般點為

$$\mathbf{a} + s(\mathbf{l} - \mathbf{a}) = (1 - s)\,\mathbf{a} + \tfrac{s}{2}\,\mathbf{b} + \tfrac{s}{2}\,\mathbf{c},$$

而直線 BM 上的一般點為

$$\mathbf{b} + t(\mathbf{m} - \mathbf{b}) = \tfrac{t}{2}\,\mathbf{a} + (1 - t)\,\mathbf{b} + \tfrac{t}{2}\,\mathbf{c}.$$

只要 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 的係數對應相等，這兩個表達式便一致：$1 - s = \frac{t}{2}$、$\frac{s}{2} = 1 - t$ 及 $\frac{s}{2} = \frac{t}{2}$。最後一式給出 $s = t$，於是由 $1 - s = \frac{s}{2}$ 得 $s = t = \frac{2}{3}$，這組值同時滿足三條等式。因此

兩條直線都通過點 G，其位置向量為

$$\mathbf{g} = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}), \qquad \text{即} \qquad G = \left(\tfrac{p_1+p_2+p_3}{3}, \tfrac{q_1+q_2+q_3}{3}\right).$$

想一想 比較係數找到了一個公共點。我們怎樣知道它就是唯一的交點？

兩條相異直線最多只有一個交點，所以我們只需確定 AL 和 BM 是不同的直線。假如它們是同一條直線，這條直線便包含 A、B 和 L，因而包含整條直線 BL，亦即直線 BC；那麼 A 就會在 BC 上，與我們的假設矛盾。所以 G 是唯一的交點。

至於第三條中線（median）CN，取點 $\mathbf{c}+u(\mathbf{n}-\mathbf{c})$，其中 $u=\frac{2}{3}$：

$$\mathbf{c}+\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{a}+\tfrac{1}{2}\mathbf{b}-\mathbf{c}\right) = \tfrac{1}{3}\mathbf{a}+\tfrac{1}{3}\mathbf{b}+\tfrac{1}{3}\mathbf{c} = \mathbf{g}.$$

所以 G 位於連接 C 與 AB 中點的直線上，正如所求。（每次都得到 $\frac{2}{3}$ 這個值，說明 G（即形心（centroid））位於每條中線上由頂點起計三分之二的位置。）

在 H 處的垂直關係

點 H 的位置向量為 $\mathbf{h}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$，所以

$$\overrightarrow{AH} = \mathbf{h}-\mathbf{a} = \mathbf{b}+\mathbf{c}, \qquad \overrightarrow{BC} = \mathbf{c}-\mathbf{b}.$$

若直線 AH 與 BC 垂直相交，則這兩個方向向量（direction vector）的純量積為零：

$$0 = (\mathbf{c}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b}) = \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = (p_3^2+q_3^2)-(p_2^2+q_2^2),$$

其中交叉項 $\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}$ 與 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ 互相抵銷，因為純量積符合交換律（commutative）。因此

$$p_2^2+q_2^2 = p_3^2+q_3^2,$$

這就是所求的結果。用文字來說，B 和 C 與原點 O 的距離相等。

以完全相同的方法，$\overrightarrow{BH}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$ 而 $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$，所以若 BH 與 AC 垂直相交，則 $(\mathbf{c}+\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$，由此得

$$p_1^2+q_1^2 = p_3^2+q_3^2.$$

第三條高線

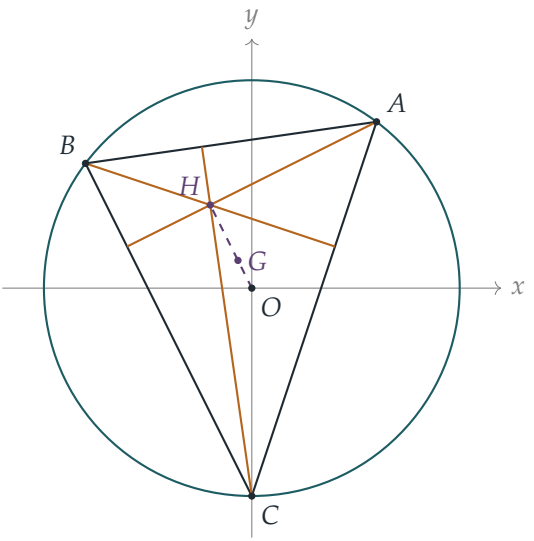
假設兩個垂直條件都成立。結合以上兩個結果，

$$p_1^2+q_1^2 = p_3^2+q_3^2 = p_2^2+q_2^2, \qquad \text{所以} \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}.$$

現在 $\overrightarrow{CH}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 而 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$，並且

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB} = (\mathbf{b}+\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 0.$$

所以 CH 垂直於 AB（前提是 $H \neq C$，這樣 CH 才是一條真正的直線；若 $H = C$，這個命題便沒有內容）。推論至此完成。



上圖顯示最後一部分的情況：A、B、C 位於以原點 O 為圓心的圓上，三條高線（altitude）（琥珀色）都通過 H，而 O、G、H 共線，且 $\mathbf{h} = 3\mathbf{g}$。

驗算

- 取 $A = (3,4)$、$B = (-4,3)$、$C = (0,-5)$，三點與 O 的距離都是 5。於是 $H = (-1,2)$，而 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (-4)(4) + (-2)(-8) = 0$；另外兩個純量積也是 0。形心為 $G = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$，即 H 的三分之一。
- 數值方面，對大約 2000 個頂點為整數點的隨機三角形，以分數精確計算出的兩條中線交點總是 $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$，並且位於第三條中線上；另外，對 1000 個內接於以 O 為圓心的圓的隨機三角形，關於 H 的三個純量積全部為零。

常見錯誤

- 證明了兩條中線都通過 G，卻沒有說明它們為何不可能是同一條直線。只要用一句話指出 A、B、C 不共線，問題便解決了。
- 把 $\overrightarrow{OH} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ 當作 AH 的方向。正確的方向是 $\mathbf{h}-\mathbf{a} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$。
- 以為這個結果對所有三角形都成立。題目的假設迫使 O 與 A、B、C 等距；若原點是任意選取的，H 便不是垂心（orthocentre）。

STEP 之外

最後一部分證明了三角形的三條高線共點（concurrent）：把原點放在外心（circumcentre）O（與各頂點等距），則點 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ 同時位於三條高線上。由於 $\mathbf{h}=3\mathbf{g}$，這也證明了外心、形心和垂心位於同一條直線上，這條直線稱為歐拉線（Euler line），且 $OG:GH=1:2$。這種向量式的幾何，由不依賴坐標的恆等式擔起主要工作，正是大學一年級線性代數（linear algebra）處理幾何的方式；Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門教材）對此有詳細闡述，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 則提供更多 STEP 風格的練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。