詳細解答

STEP I 2004，第 5 題

純數學 • 模 5 的剩餘

> **STEP I 2004，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q5

關鍵思路

這五個等差數列（arithmetic progression）把正整數按除以 5 的餘數（remainder）分成五類。只要為每一類寫出像 $5n-3$ 這樣的通項（general term），就可以把和與平方展開，再抽出因子 5，從而追蹤它們落在哪一類。這樣便能完全掌握平方數可以落在哪些類別，而兩個「不可能」的證明都由此而來：等式右邊落在一個左邊永遠到不了的類別。

解答

通項

每個數列的公差（common difference）都是 5，所以對 $n=1,2,3,\ldots$，第 n 項分別是

$$A:\ 5n-4, \qquad B:\ 5n-3, \qquad C:\ 5n-2, \qquad D:\ 5n-1, \qquad E:\ 5n.$$

（代入 $n=1$，可驗證每條式子都給出題目所列的首項。）因此，一個正整數屬於 A、B、C、D 或 E，當且僅當它除以 5 的餘數分別是 1、2、3、4 或 0。

B 的一項與 C 的一項之和

任取 B 的一項 $5m-3$ 和 C 的一項 $5n-2$，其中 $m,n\geq 1$。那麼

$$(5m-3)+(5n-2)=5m+5n-5=5(m+n-1).$$

由於 $m+n-1\geq 1$ 是正整數，這就是 E 的第 $(m+n-1)$ 項，正如所求。

B 和 C 各項的平方

對 B 的一項 $5m-3$，

$$\begin{aligned}(5m-3)^2 &= 25m^2-30m+9\\ &= 5(5m^2-6m+2)-1.\end{aligned}$$

這裏 $k=5m^2-6m+2$ 是整數，而且對所有 $m\geq 1$ 都有 $k=5m^2-6m+2=m(5m-6)+2\geq 1$（當 $m=1$ 時它等於 1；當 $m\geq 2$ 時 m 和 $5m-6$ 都是正數）。所以 $(5m-3)^2=5k-1$ 是 D 的第 k 項。B 中每一項的平方都屬於 D。

關於 C 的類似命題是：*C 中每一項的平方也是 D 的一項*。事實上，對 C 的一項 $5m-2$，

$$\begin{aligned}(5m-2)^2 &= 25m^2-20m+4\\ &= 5(5m^2-4m+1)-1,\end{aligned}$$

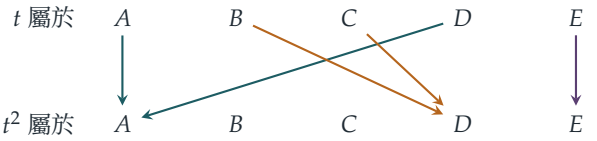
而且當 $m\geq 1$ 時 $k=5m^2-4m+1=m(5m-4)+1\geq 2$。所以 $(5m-2)^2$ 是 D 的第 k 項。

想一想 A、D 和 E 各項的平方又會落在哪裏？

第 (i) 和第 (ii) 部分都要用到這個結果，所以值得用同樣的方法處理餘下三類：

$$\begin{aligned}(5m-4)^2 &= 25m^2-40m+16 = 5(5m^2-8m+4)-4 && \text{（屬於 } A\text{），}\\ (5m-1)^2 &= 25m^2-10m+1 = 5(5m^2-2m+1)-4 && \text{（屬於 } A\text{），}\\ (5m)^2 &= 5(5m^2) && \text{（屬於 } E\text{）．}\end{aligned}$$

當 $m\geq 1$ 時，括號內的都是正整數（例如 $5m^2-8m+4=m(5m-8)+4\geq 1$，以及 $5m^2-2m+1\geq 4$）。所以平方運算把各類對應如下：



特別要留意，*沒有完全平方數*（*perfect square*）*屬於 B 或 C*：每個正的平方數都屬於 A、D 或 E。

第 (i) 部分

假設正整數 x 和 y 滿足 $x^2+5y=243\,723$。由於 $243\,723=5\times 48\,744+3$，等式右邊是 C 的一項 $5\times 48\,745-2$。於是

$$x^2=243\,723-5y=5(48\,745-y)-2.$$

這個數是正數（它等於 x^2），所以 $48\,745 - y$ 是正整數，而 x^2 是 C 的一項。但我們已證明沒有平方數屬於 C。這個矛盾（contradiction）說明這樣的正整數 x 和 y 並不存在。

第 (ii) 部分

四次方（fourth power）就是平方的平方。平方數 x^2 屬於 A、D 或 E；把 A 或 D 的一項平方，得到 A 的一項，而把 E 的一項平方，則得到 E 的一項。所以對任何正整數 x，

$$x^4 \text{ 屬於} A \text{ 或} E, \quad \text{也就是說，} \quad x^4 \text{ 的餘數是1 或0，這裏的除數是5.}$$

y^4 也是如此，所以 $2y^4$ 的餘數是 2 或 0。兩者相加，$x^4 + 2y^4$ 除以 5 的餘數等於以下其中一個數的餘數：

$$1 + 2 = 3, \qquad 1 + 0 = 1, \qquad 0 + 2 = 2, \qquad 0 + 0 = 0,$$

所以 $x^4 + 2y^4$ 屬於 C、A、B 或 E，而永遠不會屬於 D。

? **想一想** 為甚麼可以直接把餘數相加？

如果 $x^4 = 5a + r$ 而 $2y^4 = 5b + s$，那麼 $x^4 + 2y^4 = 5(a + b) + (r + s)$，所以這個和與 $r + s$ 相差 5 的倍數，與 $r + s$ 屬於同一類。這正是上面計算 $B + C$ 時所做的運算，只是寫成了一般形式。

現在 $26\,081\,974 = 5 \times 5\,216\,395 - 1$ 的末位數字是 4，所以它是 D 的一項。因此，對任何正整數 x 和 y，它都不可能等於 $x^4 + 2y^4$，正如所求。

驗算

- 小數值的例子：$2^2 = 4$、$7^2 = 49$ 和 $12^2 = 144$ 的末位數字都是 4 或 9，所以屬於 D；$3^2 = 9$、$8^2 = 64$、$13^2 = 169$ 亦然。
- 四次方：$1, 16, 81, 256, 625, 1296$ 的末位數字都是 1、6 或 5，所以屬於 A 或 E。
- 用電腦搜尋所有 $x \leq \sqrt{243\,723} \approx 493.7$，找不到任何 x 使 $243\,723 - x^2$ 是 5 的正倍數；再搜尋所有滿足 $x^4 < 26\,081\,974$ 的 x（即 $x \leq 71$），也找不到任何 y 使 $2y^4 = 26\,081\,974 - x^4$。

常見錯誤

- 把 E 的通項寫成 $5n + 5$、把 A 的通項寫成 $5n + 1$ 並無不可，但這時 n 要由 0 開始；把兩種寫法混在一起用，項數就會差了一項。

- 在第 (i) 部分，忘記利用 $x^2 > 0$ 來說明 $48\,745 - y$ 是正整數；少了這一步，x^2 就不一定是 C 的一項，因為這些數列只包含正整數。
- 在第 (ii) 部分，只處理 x^4，卻忘記因子 2 會把 y^4 的餘數由 1 變成 2。

STEP 之外

這五個數列就是模 5 的剩餘類（residue classes），而整道題目其實是 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ 中的算術：那裏的平方數是 $0, 1, 4$（即二次剩餘（quadratic residues）），四次方則是 $0, 1$，這正是費馬小定理（Fermat's little theorem）的一個例子：當 $5 \nmid a$ 時 $a^4 \equiv 1 \pmod 5$。要證明一條丟番圖方程（Diophantine equation）無解，首選的工具就是選一個合適的數，把方程對它取模。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 對同餘（congruences）和二次剩餘有十分精彩的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。