詳細解答

STEP I 2004，第 4 題

純數學 • 代換積分法

STEP I 2004，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/04-s1-q4

關鍵思路

每當見到 $\sqrt{x^2-1}$，就應該想起恆等式 (identity) $\sec^2 t - 1 = \tan^2 t$：設 $x = \sec t$，平方根便化為 $\tan t$，而由於 $\mathrm{d}x = \sec t \tan t \, \mathrm{d}t$，這個 $\tan t$ 亦會一併約去。第 (ii) 和第 (iii) 部分看似不同，但只要對根號內的式子配方（completing the square），兩者都會化成同一個形狀 $\sqrt{u^2 - a^2}$，其中 $u = x + 2$，而根號外的因子 $x + 2$ 正是這個代換（substitution）所需要的。

解答

導數

把 $\sec t = (\cos t)^{-1}$ 寫出，再用鏈式法則（chain rule），得

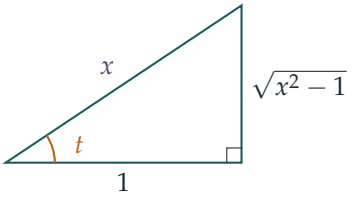
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sec t = -(\cos t)^{-2} \cdot (-\sin t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t} = \sec t \tan t.$$

第 (i) 部分

設 $x = \sec t$，於是 $\mathrm{d}x = \sec t \tan t \, \mathrm{d}t$。當 $x = \sqrt{2}$ 時，$\cos t = 1/\sqrt{2}$，$t = \frac{\pi}{4}$；當 $x = 2$ 時，$\cos t = \frac{1}{2}$，$t = \frac{\pi}{3}$。對於 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ 內的 t，我們有 $\tan t > 0$，所以

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\sec^2 t - 1} = \sqrt{\tan^2 t} = \tan t$$

（無須加上絕對值符號）。下面的三角形顯示的是同一回事：斜邊為 x，鄰邊為 1，所以對邊是 $\sqrt{x^2 - 1}$。



積分變成

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec t\tan t}{\sec^3 t\,\tan t}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \tfrac{1}{2}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin 2t\right]_{\pi/4}^{\pi/3} \\ &= \left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right) - \left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}-2}{8} + \frac{\pi}{24},\end{aligned}$$

其中用到 $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$、$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $\sin\frac{\pi}{2} = 1$。這就是所求的結果。

第 (ii) 部分

想一想 第 (ii) 部分裏並沒有 $\sqrt{x^2-1}$。第 (i) 部分可以怎樣幫得上忙？

把根號內的式子展開，然後配方：

$$(x+1)(x+3) = x^2+4x+3 = (x+2)^2 - 1.$$

所以設 $u = x+2$（而 $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$），積分便是

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,\mathrm{d}u.$$

被積函數（integrand）只在 $u^2 > 1$ 時才有定義。先考慮 $u > 1$（即 $x > -1$），並設 $u = \sec t$，其中 $0 < t < \frac{\pi}{2}$，使得 $\tan t > 0$ 及 $\sqrt{u^2-1} = \tan t$。於是

$$\int \frac{\sec t\tan t}{\sec t\,\tan t}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t + C,$$

而由於 $\sec t = u$，我們有 $t = \operatorname{arcsec} u$（等價地，即 $\arccos(1/u)$）。因此，對於 $x > -1$，

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{(x+1)(x+3)}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcsec}(x+2) + C.$$

為求完整，被積函數在 $x < -3$ 時亦有定義，此時 $u < -1$。在這個情況下，設 $u = -v$，其中 $v > 1$：被積式 $\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,\mathrm{d}u$ 變成 $\frac{1}{(-v)\sqrt{v^2-1}}(-\mathrm{d}v) = \frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\,\mathrm{d}v$，其積分為 $\operatorname{arcsec} v$。兩種情況都可以用

$$\operatorname{arcsec}|x+2| + C = \arccos\frac{1}{|x+2|} + C,$$

來概括，而兩個區間上的常數可以不同。

第 (iii) 部分

再次配方：

$$x^2+4x-5=(x+2)^2-9,$$

所以設 $u=x+2$ 後，我們需要求 $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-9}}\,\mathrm{d}u$。這一次自然的代換是 $u=3\sec t$，這樣選是為了令 $u^2-9=9\tan^2 t$。對於 $u>3$（即 $x>1$），取 $0<t<\frac{\pi}{2}$，於是 $\sqrt{u^2-9}=3\tan t$，而 $\mathrm{d}u=3\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$。於是

$$\int \frac{3\sec t\tan t}{3\sec t\cdot 3\tan t}\,\mathrm{d}t=\int \frac{1}{3}\,\mathrm{d}t=\frac{t}{3}+C,$$

而 $\sec t=u/3$。因此，對於 $x>1$，

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x-5}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\operatorname{arcsec}\frac{x+2}{3}+C.$$

與第 (ii) 部分完全一樣，$x<-5$ 的情況（此時 $u<-3$）可用 $u=-v$ 處理，而兩個區間都可以用 $\frac{1}{3}\operatorname{arcsec}(\frac{1}{3}|x+2|)+C$ 來概括。

驗算

- 對第 (i) 部分的積分使用辛普森法則（Simpson's rule），得 $0.0974060\ldots$，與 $\frac{1}{8}(\sqrt{3}-2)+\frac{\pi}{24}$ 吻合。
- 對答案求導：當 $u>1$ 時，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\operatorname{arcsec}u=\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}$（設 $u=\sec t$，並使用開首求得的導數）。例如，第 (ii) 部分的被積函數的 $\int_0^3$ 數值上是 0.322241，而 $\operatorname{arcsec}5-\operatorname{arcsec}2=\arccos\frac{1}{5}-\frac{\pi}{3}$ 與之相符。
- 第 (iii) 部分應該是第 (ii) 部分經過縮放後的版本：設 $u=3w$，則 $\int\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-9}}=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}w}{w\sqrt{w^2-1}}$，這就解釋了因子 $\frac{1}{3}$ 的由來。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分忘記更改積分上下限，或把上下限弄反：$\sec t=\sqrt{2}$ 給出 $t=\frac{\pi}{4}$，而不是 $\frac{\pi}{3}$。
- 寫下 $\sqrt{\tan^2 t}=\tan t$，卻沒有檢查 $\tan t$ 在所用範圍內的正負號。
- 在第 (iii) 部分代入 $u=\sec t$ 而不是 $u=3\sec t$，結果剩下 $\sqrt{\sec^2 t-9}$，沒有恆等式可以把它化簡。

STEP 之外

反正割函數（inverse secant）只是一個家族的其中一員：代換 $x = a\sin t$, $a\tan t$, $a\sec t$（或它們的雙曲函數（hyperbolic function）近親 $a\sinh t$, $a\cosh t$）可以馴服 $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ 和 $\sqrt{x^2 - a^2}$，而配方可以把任何 $\sqrt{\text{二次式}}$ 化為其中一種。在正負號上，以及在原函數（antiderivative）定義於哪個區間上所需要的謹慎，正是初嘗分析（analysis）課程如何令積分變得嚴謹的滋味。Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（實分析入門）嚴格地處理了代換定理（substitution theorem），而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等數學難題集）則有更多同類風格的 STEP 積分題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。