詳細解答

STEP I 2004，第 3 題

純數學 • 二元多項式的因式分解

STEP I 2004，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/04-s1-q3

關鍵思路

二元多項式（polynomial in two variables）可以看成只含其中一個變數的多項式，而係數則含有另一個變數。把它看成 x 的多項式時，因式定理（factor theorem）依然適用，長除法（long division）依然適用，而 x 的二次式只要判別式（discriminant）是完全平方（perfect square），就依然可以因式分解（factorise）。在第 (ii) 部分，x 的首項係數（leading coefficient）本身是 y 的一次式，這暗示其中一個因式只含 y。

解答

第 (i) 部分

把式子 $(*)$ 按 x 的冪次整理：

$$P(x) = x^3 + (2y-5)x^2 + (y^2 - 8y + 6)x + (6y - 3y^2).$$

代入 $x = 3$，

$$\begin{aligned} P(3) &= 27 + 9(2y-5) + 3(y^2 - 8y + 6) + 6y - 3y^2 \\ &= (27 - 45 + 18) + (18y - 24y + 6y) + (3y^2 - 3y^2) = 0 \end{aligned}$$

對任何 y 都成立，所以根據因式定理，$x - 3$ 是一個因式，正如題目所求。

要找出另一個因式，設 $P(x) = (x-3)(x^2 + px + q)$，其中 p 和 q 可以與 y 有關。展開右邊得 $x^3 + (p-3)x^2 + (q-3p)x - 3q$，再比較係數（comparing coefficients）：

$$\begin{aligned} x^2: &\quad p - 3 = 2y - 5, && \text{所以} p = 2y - 2, \\ x^0: &\quad -3q = 6y - 3y^2, && \text{所以} q = y^2 - 2y, \end{aligned}$$

而 x 的係數亦吻合：$q-3p=y^2-8y+6$，與應有的結果一致。所以二次因式是

$$x^2+(2y-2)x+y^2-2y=(x^2+2xy+y^2)-2(x+y)=(x+y)(x+y-2).$$

想一想 我們是怎樣看出這個二次式可以因式分解的？

$x^2+2xy+y^2$ 這幾項合起來是完全平方 $(x+y)^2$，而餘下的項 $-2x-2y$ 是 $x+y$ 的倍數。(如果一時看不出這個分組方法，可以計算 x 的判別式：$(2y-2)^2-4(y^2-2y)=4$，是完全平方，所以根是 $x=-y+1\pm1$，即 $x=-y$ 和 $x=2-y$。) 因此

$$(*)=(x-3)(x+y)(x+y-2),$$

所以 $a=1$，$b=0$，$c=1$，$d=-2$（或者把兩個因式對調：$a=1$，$b=-2$，$c=1$，$d=0$）。

第 (ii) 部分

把這個式子稱為 Q，同樣按 x 的冪次整理：

$$Q=(y+2)x^2+(12-4y-5y^2)x+(6y^3-y^2-21y+10).$$

x^2 的係數是 $y+2$。如果 Q 是三個一次因式的積，x^2 項就來自其中兩個因式含 x 的部分，所以很自然會問：$y+2$ 能否整除整個式子？設 $y=-2$：

$$12+8-20=0,\qquad -48-4+42+10=0,$$

所以餘下兩個係數在 $y=-2$ 時都等於零，根據 (關於 y 的) 因式定理，兩者都可被 $y+2$ 整除：

$$12-4y-5y^2=-(5y^2+4y-12)=-(y+2)(5y-6),$$
$$6y^3-y^2-21y+10=(y+2)(6y^2-13y+5).$$

另外 $6y^2-13y+5=(2y-1)(3y-5)$。因此

$$Q=(y+2)[x^2-(5y-6)x+(2y-1)(3y-5)].$$

想一想 方括號內的式子可以因式分解嗎？我們怎樣判斷？

它關於 x 的判別式是

$$\begin{aligned}(5y-6)^2-4(2y-1)(3y-5)&=25y^2-60y+36-(24y^2-52y+20)\\&=y^2-8y+16=(y-4)^2,\end{aligned}$$

是完全平方，所以可以分解。更快捷的做法是留意 $(2y-1)+(3y-5)=5y-6$，所以積為 $(2y-1)(3y-5)$、和為 $5y-6$ 的兩個數就是 $2y-1$ 和 $3y-5$，由此得根 $x=2y-1$ 和 $x=3y-5$。因此

$$Q=(y+2)(x-2y+1)(x-3y+5).$$

驗算

- 在第 (i) 部分代入 $x = y = 1$：$(*)$ 給出 $1-5+2+1-8-3+6+6 = 0$，而 $(1-3)(2)(0) = 0$。取 $x = 2$，$y = 1$：$(*)$ 給出 $8-20+8+2-16-3+12+6 = -3$，而 $(-1)(3)(1) = -3$。
- 在第 (ii) 部分代入 $x = y = 0$：$Q = 10$，而 $(2)(1)(5) = 10$。取 $x = 1$，$y = 1$：$Q = 6-1-21+2+12-4+1-5+10 = 0$，而的確 $x - 2y + 1 = 0$。
- 我們在 2000 個隨機點 (x, y) 上以精確的有理數運算核對了兩個因式分解，每次結果都一致。

常見錯誤

- 把式子看成 x 的多項式，卻忘記「常數」項是指所有不含 x 的項，在第 (i) 部分即 $6y - 3y^2$。
- 在第 (ii) 部分，嘗試找一個根 $x = k$，其中 k 是一個數：形如 $x - k$ 的因式並不存在。應該先找出的，是不含 x 的因式 $y + 2$。
- 把 $-(5y^2 + 4y - 12)$ 除以 $y + 2$ 時出現正負號錯誤；應展開驗算。

STEP 之外

多元多項式構成一個環（ring），而 $\mathbb{Z}[x, y]$ 可以看成 $(\mathbb{Z}[y])[x]$：即係數是 y 的多項式的 x 的多項式。這正是我們剛才的做法，亦是因式定理和除法依然適用的原因。這些環具有唯一分解性質（unique factorisation）（高斯引理，Gauss's lemma），所以我們找到的因式分解，除了次序和正負號之外是唯一的。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）詳細闡述了這些概念。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。