詳細解答

STEP I 2004，第 2 題

純數學 • 下取整函數的積分

STEP I 2004，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/04-s1-q2

關鍵思路

函數 $[x]$ 在每個區間 $r \le x < r+1$ 上都是常數，所以凡是由它構成的函數都是階梯函數（step function）。對階梯函數求積分，不過是把一個個長方形的面積加起來：在各整數處把 $[0, a]$ 分段，在每一段單位長度的區間上，被積函數（integrand）都是常數。當 a 不是整數時，唯一的新情況是最後多了一個較窄的長方形。

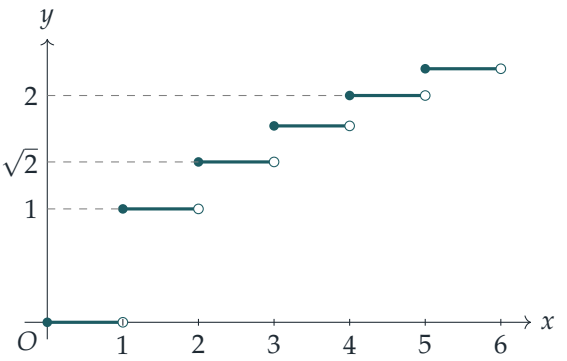
解答

第 (i) 部分

對於 $x \ge 0$，設 $r = [x]$。那麼 r 是非負整數，且 $r \le x < r+1$，所以在該區間上

$$y = \sqrt{[x]} = \sqrt{r}.$$

因此圖像呈階梯狀：在 $[0,1)$ 上 $y = 0$，在 $[1,2)$ 上 $y = 1$，在 $[2,3)$ 上 $y = \sqrt{2}$，如此類推。每一級都包含左端點（實心點），但不包含右端點（空心點），因為 $[x]$ 恰好在每個整數處向上跳升。由於 $\sqrt{r+1} - \sqrt{r} = 1/(\sqrt{r+1} + \sqrt{r})$ 遞減，各級升高的幅度愈來愈小。對於 $x < 0$，我們有 $[x] \le -1$，所以 $\sqrt{[x]}$ 在該處沒有定義，圖像只在 $x \ge 0$ 的範圍內出現。



現設 a 為正整數。在整數 $1, 2, \ldots, a-1$ 處把積分範圍分段：

$$\int_0^a \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} \int_r^{r+1} \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x.$$

在 $r \le x < r+1$ 上，被積函數等於常數 $\sqrt{r}$。（在 $x = r+1$ 這一點上它取另一個值，但改變函數在一點上的值並不會改變其積分。）所以每一段都是一個闊度為 1、高度為 $\sqrt{r}$ 的長方形的面積：

$$\int_r^{r+1} \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x = \sqrt{r}, \qquad \text{因此} \qquad \int_0^a \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} \sqrt{r},$$

這正是所要證明的結果。

第 (ii) 部分

完全相同的論證也適用於 $2^{[x]}$，它在 $r \le x < r+1$ 上等於 2^r。對於正整數 a，

$$\int_0^a 2^{[x]}\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} \int_r^{r+1} 2^r\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} 2^r = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{a-1}.$$

這是一個等比級數（geometric series），首項為 1，公比為 2，共有 a 項，所以其和為

$$\frac{2^a - 1}{2 - 1} = 2^a - 1,$$

這就是所求的結果。

第 (iii) 部分

現設 $a > 0$ 不是整數，並令 $n = [a]$，那麼 n 是整數，且 $n < a < n+1$ 及 $n \ge 0$。

? **想一想** 積分到了哪裏，就不再是若干個完整單位長方形之和？

直到 $x = n$ 為止，一切都與第 (ii) 部分相同；餘下的一段是 $n \le x \le a$，這是一條闊度為 $a - n$ 的窄條，完全位於同一級之內，其上 $[x] = n$。（若 $n = 0$，第一段是空的，其貢獻為 $2^0 - 1 = 0$，所以同一條公式仍然適用。）因此

$$\begin{aligned}\int_0^a 2^{[x]}\,\mathrm{d}x &= \int_0^n 2^{[x]}\,\mathrm{d}x + \int_n^a 2^n\,\mathrm{d}x \\ &= (2^n - 1) + (a - n)\,2^n \\ &= 2^{[a]}(1 + a - [a]) - 1.\end{aligned}$$

驗算

- 若 $0 < a < 1$，則 $[a] = 0$，公式給出 $1 \cdot (1 + a) - 1 = a$：正確，因為被積函數在 $[0, a]$ 上等於 1。
- 當 a 從下方趨近整數 m 時，$[a] = m - 1$，公式趨向 $2^{m-1} \cdot 2 - 1 = 2^m - 1$，與第 (ii) 部分吻合。所以這個積分是 a 的連續函數（continuous function）；任何有界函數（bounded function）的積分，作為其積分上限的函數，都必定如此。
- 以數值驗算，取 $a = 2.5$，公式給出 $4 \times 1.5 - 1 = 5$，而用中點法則（midpoint rule）計算該積分，同樣得出 5.000。至於第 (i) 部分，取 $a = 5$，兩邊都是 $0 + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 \approx 6.1463$。

常見錯誤

- 由 $r = 1$ 加到 a，而不是由 $r = 0$ 加到 $a - 1$：在 $[r, r + 1)$ 上，高度是 $\sqrt{r}$，即左端點處的值。
- 在第 (iii) 部分，遺漏了那條不完整的窄條，或把它的闊度當作 1 而不是 $a - [a]$。
- 用垂直線把各級連起來，或在兩端都畫上實心點：下取整函數（floor function）在整數處並不連續。

STEP 之外

把長方形面積相加來求階梯函數的積分，正是大學裏建立黎曼積分（Riemann integral）的方法：先為階梯函數定義積分，然後用階梯函數從上方和下方把一般的函數夾住。第 (i) 部分也是比較求和與積分的第一步，由此可得出諸如 $\sum_{r=1}^{n} \sqrt{r} \approx \frac{2}{3}n^{3/2}$ 的估計。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本實分析入門教科書）就是以這種方式建立黎曼積分的。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。