詳細解答

STEP I 2004，第 14 題

概率與統計 • 排列的計數

STEP I 2004，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/04-s1-q14

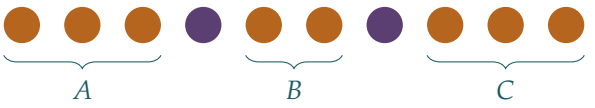
關鍵思路

想像把整個寶箱裏的硬幣逐枚取出，排成一行。海盜其實只是在兩枚鉛幣的位置把這一行切開：第一個海盜得到第一枚鉛幣之前的金幣，第二個海盜得到兩枚鉛幣之間的金幣，第三個海盜得到第二枚鉛幣之後的金幣。硬幣的每一種排列次序出現的可能性都相同，所以整個問題歸結為數算兩枚鉛幣可以落在哪些位置。

解答

設想全部 $n+2$ 枚硬幣按隨機次序逐一抽出，儘管第三個海盜實際上只是把剩下的一手撈走。這並不改變誰得到哪些硬幣。抽取是隨機的，所以從 $n+2$ 個位置中為鉛幣選出兩個位置的 $\binom{n+2}{2}$ 種選法，每一種的可能性都相同。

設 A、B 和 C 分別為第一、第二和第三個海盜取得的金幣數目。那麼 $A+B+C=n$，而這一行硬幣看起來是這樣的：



圖中琥珀色的是金幣，紫紅色的是鉛幣。鉛幣的位置決定了 (A,B,C)，而每一個滿足 $A+B+C=n$ 的非負整數三元組，都恰好來自一種位置選法。所以這 $\binom{n+2}{2}=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 個三元組 (A,B,C) 的可能性全部相同。

第 (i) 部分

第一個海盜得不到金幣，當且僅當 $A = 0$，即抽出的第一枚硬幣就是鉛幣。由於 $n+2$ 枚硬幣中每一枚最先被抽出的可能性都相同，這個事件的概率（probability）是 $\frac{2}{n+2}$。因此

$$\mathrm{P}(A \geq 1) = 1 - \frac{2}{n+2} = \frac{n}{n+2}.$$

（用數算的方法也得到相同答案：$A = 0$ 時餘下 $B + C = n$，它有 $n+1$ 個解，而 $(n+1)\big/\frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{2}{n+2}$。）

第 (ii) 部分

> **想一想** 第二個海盜是在一個隨機的時刻才開始抽的。她的處境真的不比第一個海盜差嗎？

是的，她的處境並不較差。我們數算 $B = 0$ 的三元組：這時 $A + C = n$，它有 $n+1$ 個解，與第 (i) 部分完全一樣。所以

$$\mathrm{P}(B \geq 1) = 1 - \frac{n+1}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}.$$

事實上，由於所有三元組 (A, B, C) 的可能性都相同，三人所得的份額是*可交換的*（exchangeable）：每個海盜得到金幣的機會都同樣是 $\frac{n}{n+2}$，連第三個海盜也不例外。

第 (iii) 部分

我們需要 A、B 和 C 全部至少為 1。設 $A = A' + 1$、$B = B' + 1$ 和 $C = C' + 1$。於是我們想要的三元組就對應於 $A' + B' + C' = n - 3$ 的非負整數解。根據隔板法（stars and bars），這樣的解共有 $\binom{n-1}{2}$ 個，這一點也可以直接看出：在相鄰金幣之間的 $n-1$ 個空隙中，選出兩個來放鉛幣。因此，對於 $n \geq 1$，

$$\mathrm{P}(A \geq 1,\ B \geq 1,\ C \geq 1) = \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n+2}{2}} = \frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)}.$$

當 $n = 1$ 和 $n = 2$ 時，這個概率是 0，這是必然的，因為金幣不足三枚時，三個海盜不可能人人都有金幣。（當 $n = 0$ 時，概率顯然是 0；公式在這裏並不適用，因為 $\binom{n-1}{2}$ 所數算的空隙根本不存在。）

驗算

- 當 $n = 1$ 時，硬幣的排列有 GLL、LGL 和 LLG 三種，可能性全部相同。第一個海盜只在 GLL 中得到金幣，其概率為 $\frac{1}{3} = \frac{1}{1+2}$；第二個海盜只在 LGL 中得到金幣，概率同樣是 $\frac{1}{3}$。

- 當 $n = 3$ 時，唯一合乎要求的排列是 GLGLG，它是 $\binom{5}{2} = 10$ 種排列中的一種，而公式給出 $\frac{2\cdot 1}{4\cdot 5} = \frac{1}{10}$。
- 對 $n = 1, \ldots, 14$ 逐一窮舉，結果與三條公式全部吻合。以 $n = 5$ 模擬 2×10^5 個寶箱，得出 0.715、0.714 和 0.286，而理論值分別為 $\frac{5}{7} \approx 0.714$、$\frac{5}{7}$ 和 $\frac{12}{42} = \frac{2}{7} \approx 0.286$。

常見錯誤

- 把第二個海盜的抽取當作從一個裝滿的寶箱重新開始。留給她的金幣有多少，取決於第一個海盜抽得怎樣。
- 在第 (iii) 部分把 $\mathrm{P}(A \geq 1)$、$\mathrm{P}(B \geq 1)$ 和 $\mathrm{P}(C \geq 1)$ 相乘。各人的份額並非獨立（independent），因為它們的總和必須是 n。

STEP 之外

鉛幣位置與 $A + B + C = n$ 的解之間的對應，就是「隔板法」的雙射（bijection）。它說明了隨機放置的標記之間的間隔是可交換的。它的連續版本，是把點均勻地投在一根棒上，由此引出均勻間距（uniform spacings）理論和狄利克雷分佈（Dirichlet distribution），而這類次序統計量（order statistics）在大學一年級的概率論中隨處可見。Blitzstein 與 Hwang 合著的 *Introduction to Probability*（概率論入門）對這種數算方法以及相關的對稱性論證，都有十分出色的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。