詳細解答

STEP I 2004，第 12 題

概率與統計 • 貝葉斯定理

STEP I 2004，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/04-s1-q12

關鍵思路

從第 1 組抽出的樣本，大致告訴我們：已知一塊晶片屬於第 1 組，它來自機器 A 的條件概率（conditional probability）是多少。因此，我們利用貝葉斯定理（Bayes' theorem），以 λ、p 和 q 表示這個條件概率，令它等於觀察所得的比例，再解出 λ。分揀出錯只改變了每部機器所生產的晶片落入第 1 組的概率；方法則完全相同。

解答

從工廠的產品中隨機抽出一塊晶片。設 A 為該晶片由機器 A 製造的事件（故 $\mathrm{P}(A) = \lambda$ 及 $\mathrm{P}(A') = 1 - \lambda$），$P$ 為該晶片完美無瑕的事件，G 為該晶片被放入第 1 組的事件。題目給出 $\mathrm{P}(P \mid A) = p$ 及 $\mathrm{P}(P \mid A') = q$。

從第 1 組隨機抽出的一塊晶片，就是在 G 發生的條件下，從全部產品中隨機抽出的一塊晶片。由於樣本很大，觀察所得的比例 $\frac{2}{5}$ 是 $\mathrm{P}(A \mid G)$ 的良好估計，而我們對 λ 的估計值，就是使 $\mathrm{P}(A \mid G)$ 恰好等於 $\frac{2}{5}$ 的那個值。

分揀完全準確

此時 G 與 P 是同一事件。根據貝葉斯定理，

$$\mathrm{P}(A \mid P) = \frac{\mathrm{P}(P \mid A)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(P \mid A)\,\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(P \mid A')\,\mathrm{P}(A')} = \frac{\lambda p}{\lambda p + (1-\lambda)q}.$$

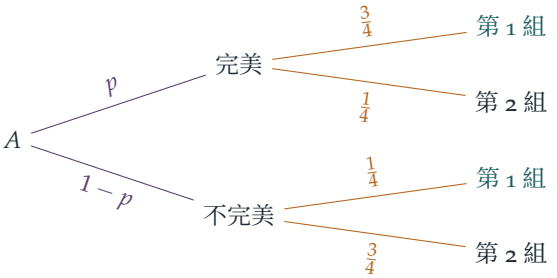
令上式等於 $\frac{2}{5}$，然後交叉相乘（分母為正數）：

$$\begin{aligned} 5\lambda p &= 2\lambda p + 2(1-\lambda)q \\ 3\lambda p + 2\lambda q &= 2q \\ \lambda &= \frac{2q}{3p+2q}, \end{aligned}$$

這就是所求的估計值，因為 $3p + 2q > 0$。

分揀出錯

現在，一塊晶片進入第 1 組有兩種途徑：本身完美而被正確分揀，或本身不完美而被錯誤分揀。我們假設分揀出錯與晶片由哪部機器製造互相獨立 (independent)，也就是說，在已知晶片是否完美的情況下，它如何被分揀與它來自哪部機器無關。下面的樹形圖顯示來自機器 A 的晶片的各個分支；機器 B 的情況相同，只需把 p 換成 q。



把通往第 1 組的兩個分支相加，

$$\mathrm{P}(G \mid A) = \tfrac{3}{4}p + \tfrac{1}{4}(1-p) = \frac{1+2p}{4}, \qquad \mathrm{P}(G \mid A') = \tfrac{3}{4}q + \tfrac{1}{4}(1-q) = \frac{1+2q}{4}.$$

於是，再次運用貝葉斯定理（因子 $\frac{1}{4}$ 互相約去），

$$\mathrm{P}(A \mid G) = \frac{\lambda(1+2p)}{\lambda(1+2p) + (1-\lambda)(1+2q)}.$$

想一想 證據有沒有改變？$\frac{2}{5}$ 還應該沿用嗎？

應該沿用：樣本確實是從第 1 組抽出的，而其中確實有 $\frac{2}{5}$ 來自機器 A。改變了的，只是我們對晶片如何進入第 1 組所建立的模型。因此，我們令 $\mathrm{P}(A \mid G)$ 的新表達式等於 $\frac{2}{5}$：

$$\begin{aligned} 5\lambda(1+2p) &= 2\lambda(1+2p) + 2(1-\lambda)(1+2q) \\ \lambda\big[3(1+2p) + 2(1+2q)\big] &= 2(1+2q) \\ \lambda &= \frac{2(1+2q)}{5+6p+4q}. \end{aligned}$$

這就是 λ 的新估計值。留意它其實就是第一個答案，只是把 p 和 q 分別換成 $\frac{1+2p}{4}$ 和 $\frac{1+2q}{4}$，即進入第 1 組的新概率。

驗算

- 若 $p = q$，兩部機器在品質上無從分辨，因此第 1 組的組成應與整體產量的比例一致，而 λ 應為 $\frac{2}{5}$。兩條公式都給出這個結果：$\frac{2p}{5p} = \frac{2}{5}$ 及 $\frac{2(1+2p)}{5+10p} = \frac{2}{5}$。
- 兩個估計值都嚴格介乎 0 與 1 之間，因為兩者的分子均為正數，且小於分母。
- 以 $\lambda = 0.3$、$p = 0.6$、$q = 0.8$ 及分揀出錯的情況模擬 4×10^5 塊晶片，結果第 1 組中有 0.2667 來自機器 A，而公式給出的數值是 0.2661；把模擬所得的比例代入公式反過來求解，得回 $\lambda \approx 0.301$。

常見錯誤

- 令 $\frac{2}{5}$ 等於 $\mathrm{P}(G \mid A)$ 或 λp，而不是等於條件概率 $\mathrm{P}(A \mid G)$。
- 在第二部分，忘記了被錯誤放入第 1 組的不完美晶片，即只用了 $\frac{3}{4}p$。

STEP 之外

選取能使觀察所得數據「完全吻合」的參數值，這種做法稱為*矩估計法*（method of moments）；在本題中，它與最大似然估計（maximum likelihood estimation）的結果一致，而後者你會在大學的第一門統計學課程中遇到。出錯的分揀機是量度誤差（measurement error）的一個簡單模型，這種誤差又稱錯誤分類（misclassification），在醫學檢測中是個嚴重的實際問題：假陽性（false positive）和假陰性（false negative）正是以這種方式扭曲觀察所得的比例。想進一步了解貝葉斯定理和條件化，可參閱 Blitzstein 與 Hwang 合著的 *Introduction to Probability*（概率論入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。