詳細解答

STEP I 2004，第 11 題

力學 • 摩擦力與鉸接梯子

> **STEP I 2004，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q11

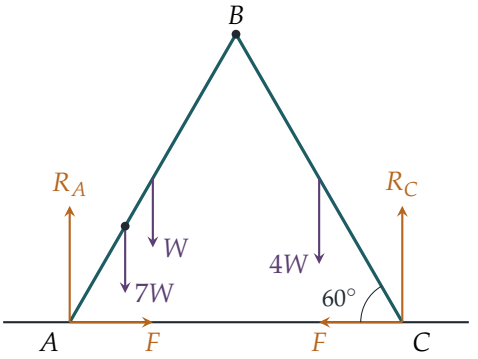
關鍵思路

在任何一處滑動之前，整個梯架處於平衡（equilibrium），所以我們可以由整個系統求出兩個法向反作用力（normal reaction），再單獨考慮其中一把梯子來求摩擦力（對鉸鏈取力矩，便可消去未知的鉸鏈力）。水平方向的外力只有兩個摩擦力，所以它們大小相等。法向反作用力較小的那隻梯腳，所需的比值 F/R 較大，因此最先滑動的就是那隻梯腳。

解答

我們把每把梯子視為長度為 $2a$ 的均勻桿（uniform rod），把 B 處的鉸鏈（hinge）視為光滑，並把裝修工人視為質點（particle）。由於 $AB = BC$ 且 $\angle ABC = 60°$，三角形 ABC 是等邊三角形：$AC = 2a$，而每把梯子與地面成 $60°$ 角。於是 B 與每隻梯腳的水平距離為 a，離地面的高度為 $a\sqrt{3}$。

當裝修工人沿 AB 爬到三分之一處時，她與 A 的水平距離為 $\frac{1}{3}a$。AB 的中心與 A 的水平距離為 $\frac{1}{2}a$，而 BC 的中心與 A 的水平距離為 $\frac{3}{2}a$。



法向反作用力

設 A 和 C 處的法向反作用力分別為 R_A 和 R_C。對整個系統沿鉛垂方向分解力，得

$$R_A + R_C = W + 4W + 7W = 12W.$$

對整個系統以 A 為支點取力矩（moments）（鉸鏈力是內力，所以不會出現）：

$$R_C \cdot 2a = W \cdot \tfrac{1}{2}a + 7W \cdot \tfrac{1}{3}a + 4W \cdot \tfrac{3}{2}a = \tfrac{53}{6}Wa,$$

所以

$$R_C = \tfrac{53}{12}W, \qquad R_A = 12W - \tfrac{53}{12}W = \tfrac{91}{12}W.$$

摩擦力

兩隻梯腳有向外張開的趨勢，所以每隻梯腳所受的摩擦力（friction）都指向內側。對整個系統沿水平方向分解力，摩擦力是僅有的水平外力，所以兩者大小相同；記這個大小為 F。

要求出 F，我們需要單獨考慮其中一把梯子。取沒有裝修工人的 BC，並以 B 為支點取力矩，使未知的鉸鏈力消失。以 B 為支點，反作用力 R_C 的力臂（lever arm）為 a，重量 $4W$ 的力臂為 $\frac{1}{2}a$，而摩擦力 F（水平方向，作用於地面的高度）的力臂為 $a\sqrt{3}$。重量和 F 使 BC 向一方轉動，而 R_C 使它向另一方轉動，所以

$$R_C \cdot a = 4W \cdot \tfrac{1}{2}a + F \cdot a\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad F = \frac{R_C - 2W}{\sqrt{3}} = \frac{29W}{12\sqrt{3}}.$$

作為驗算，對 AB 以 B 為支點作同樣的計算，得 $R_A \cdot a = W \cdot \frac{1}{2}a + 7W \cdot \frac{2}{3}a + Fa\sqrt{3}$，所以 $F\sqrt{3} = \frac{91}{12}W - \frac{31}{6}W = \frac{29}{12}W$，與上面的結果一致。

哪一把梯子會滑動？

想一想 兩隻梯腳所受的摩擦力相同，那麼我們怎樣判斷哪一隻會先失守？

當所需的摩擦力等於 μ 乘以該處的法向反作用力時，梯腳便處於即將滑動的狀態。兩隻梯腳所需的 F 相同，所以法向反作用力較小的梯腳所需的比值較大：

$$\frac{F}{R_A} = \frac{29}{91\sqrt{3}} \approx 0.184, \qquad \frac{F}{R_C} = \frac{29}{53\sqrt{3}} \approx 0.316.$$

所以 C 最先達到極限摩擦（limiting friction）：滑動的是**較重的梯子** BC，儘管裝修工人是在 AB 上。她的重量把 A 牢牢壓在地面上，而 C 所承受的負荷則少得多。

我們還應確定在此之前沒有任何一處已經滑動。若她爬到全長的 t 倍處，同樣的計算給出 $R_C = (\frac{13}{4} + \frac{7}{2}t)W$ 和 $F\sqrt{3} = R_C - 2W = (\frac{5}{4} + \frac{7}{2}t)W$，所以

$$\frac{F}{R_C} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{5}{4} + \frac{7}{2}t}{\frac{13}{4} + \frac{7}{2}t} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{2}{\frac{13}{4} + \frac{7}{2}t}\right),$$

它隨 t 遞增。同樣，F/R_A 也隨 t 遞增（它的分子上升，而分母 $R_A = 12W - R_C$ 下降）。所以隨着她向上爬，所需的比值不斷增大，而第一次滑動恰好發生在 F/R_C 達到 μ 之時，即 $t = \frac{1}{3}$。因此

$$\mu = \frac{29}{53\sqrt{3}} = \frac{29\sqrt{3}}{159} \approx 0.316.$$

驗算

- 對 AB 以 B 為支點取力矩，所得的 F 與對 BC 以 B 為支點取力矩所得的相同（見上文），所以各反作用力互相吻合。
- 完全沒有裝修工人時，由於 BC 較重，R_C 應大於 R_A；事實上，此時以 A 為支點取力矩得 $R_C = \frac{13}{4}W$ 和 $R_A = \frac{7}{4}W$，兩者之和為 $5W$。
- 當 $t = \frac{11}{14}$ 時 $R_A = R_C$；只有超過這一點，滑動的才會是 AB，所以在 $t = \frac{1}{3}$ 時滑動的必定是 BC。
- 數值上，由坐標重新計算每一個力（並對兩把梯子檢查以 B 為支點的力矩），得 $\mu \approx 0.31591$。

常見錯誤

- 以為載着裝修工人的那把梯子會滑動。她的重量增大了 A 處的法向反作用力，使那隻梯腳更加穩固。

- 對單獨一把梯子以梯腳為支點取力矩，這樣會引入未知的鉸鏈力。對一把梯子以 B 為支點取力矩便可避開它。
- 忘記摩擦力對鉸鏈的力臂為 $a\sqrt{3}$（即 B 的高度）。

STEP 之外

這是處理鉸接結構的靜力學（statics）基本策略：先把整個結構當作一個整體來求外部反作用力，然後在某個接合處把它切開，求出其中一個構件必須提供的力。哪一個接觸點最先失效這類問題，會引向框架的分析，以及虛功原理(principle of virtual work)；在虛功原理中，平衡是透過考慮符合約束條件的微小位移來求得的。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對剛體靜力學和摩擦有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。