詳細解答

STEP I 2004，第 10 題

力學 • 勻加速運動學

STEP I 2004，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

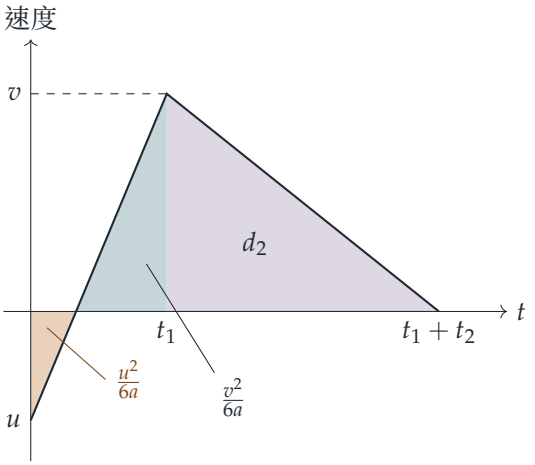
step.maths.org/questions/04-s1-q10

關鍵思路

這裏全部都是勻加速運動（constant acceleration），所以單靠 $v^2 = u^2 + 2as$ 和 $v = u + at$ 便足以解決整條題目。唯一的陷阱是距離（distance）這個詞。當 $u < 0$ 時，質點（particle）先向後運動，停下來，然後才向前加速，所以距離 d_1 是兩段路程之和，而不是單一個位移（displacement）。畫一幅速度—時間圖（velocity–time graph）便一目了然：距離就是圖線與時間軸之間的總面積，軸下方的面積也當作正數計算。

解答

取最終速度 v 的方向為正方向。在第一階段，加速度是 $+3a$（它令速度由 u 上升至 $v > u$）；在第二階段，加速度是 $-a$，直至速度變為 0。全程均有 $a > 0$。



上圖所示為 $u < 0$ 的情況：軸下方的小三角形就是向後運動的那段路程。

第二階段（兩種情況皆適用）。 質點以減速度（deceleration）a 由速率 v 減至靜止，期間從不掉頭，所以

$$0 = v^2 - 2ad_2 \quad \Longrightarrow \quad d_2 = \frac{v^2}{2a}.$$

第 (i) 部分

若 $u > 0$，速度由 u 上升至 v，一直保持正值，所以距離等於位移：

$$v^2 = u^2 + 2(3a)d_1 \quad \Longrightarrow \quad d_1 = \frac{v^2 - u^2}{6a}.$$

因此

$$3d_1 = \frac{v^2 - u^2}{2a} < \frac{v^2}{2a} = d_2,$$

因為 $u^2 > 0$。所以 $3d_1 < d_2$，正如所求。

第 (ii) 部分

現在 $u < 0$，第一階段要分成兩段。

> ? **想一想** 為甚麼不能再直接使用 $v^2 = u^2 + 6ad_1$？

這條公式給出的是位移，即 $\frac{v^2-u^2}{6a}$。但質點是先向後運動的。在加速度 $3a$ 之下，它由速率 $|u|$ 減慢至靜止，走過 $\frac{u^2}{6a}$（由 $0 = u^2 - 2(3a)s$ 得出）。然後它由靜止加速至 v，走過 $\frac{v^2}{6a}$。距離是兩者之和：

$$d_1 = \frac{u^2 + v^2}{6a}, \qquad \text{所以} \qquad 3d_1 = \frac{u^2 + v^2}{2a}.$$

與 $d_2 = \frac{v^2}{2a}$ 和 $2d_2 = \frac{2v^2}{2a}$ 比較：

- $3d_1 - d_2 = \dfrac{u^2}{2a} > 0$，因為 $u \neq 0$；
- $2d_2 - 3d_1 = \dfrac{v^2 - u^2}{2a} > 0$，因為 $v > |u|$。

因此 $d_2 < 3d_1 < 2d_2$，正如所求。

平均速率

所需時間與方向無關。在第一階段，速度以變率 $3a$ 改變了 $v - u$；在第二階段，速度以變率 a 改變了 v，所以

$$t_1 = \frac{v - u}{3a}, \qquad t_2 = \frac{v}{a}, \qquad t_1 + t_2 = \frac{4v - u}{3a},$$

不論 u 的正負如何。

$u>0$ 的情況。總距離是 $\frac{v^2-u^2}{6a}+\frac{3v^2}{6a}=\frac{4v^2-u^2}{6a}$，所以平均速率（average speed）是

$$S_+=\frac{4v^2-u^2}{6a}\cdot\frac{3a}{4v-u}=\frac{4v^2-u^2}{2(4v-u)}.$$

$u<0$ 的情況。設 $u=-w$，其中 $0<w<v$。總距離是 $\frac{v^2+w^2}{6a}+\frac{3v^2}{6a}=\frac{4v^2+w^2}{6a}$，所需時間是 $\frac{4v+w}{3a}$，所以

$$S_-=\frac{4v^2+w^2}{2(4v+w)}.$$

要比較這兩個數，可把它們分別與 $\frac{1}{2}v$ 比較：

$$S_+-\tfrac{1}{2}v=\frac{4v^2-u^2-v(4v-u)}{2(4v-u)}=\frac{u(v-u)}{2(4v-u)},$$
$$S_--\tfrac{1}{2}v=\frac{4v^2+w^2-v(4v+w)}{2(4v+w)}=-\frac{w(v-w)}{2(4v+w)}.$$

在第一種情況中 $0<u<v$，第一個式子的分子和分母皆為正數，所以 $S_+>\frac{1}{2}v$。在第二種情況中 $0<w<v$，第二個式子是負數，所以 $S_-<\frac{1}{2}v$。因此

$$S_-<\tfrac{1}{2}v<S_+,$$

即 $u>0$ 時平均速率較大，正如所求。留意這個結論對兩種情況中任何 $|u|$ 的值都成立，而不限於兩者相等的時候：只要 v 和 a 相同，$\frac{1}{2}v$ 便把每一段 $u>0$ 的旅程與每一段 $u<0$ 的旅程分隔開。

驗算

- 取 $v=2$，$a=1$。當 $u=1$：$d_1=\frac{1}{2}$，$d_2=2$，所以 $3d_1=1.5<2$，所需時間是 $\frac{7}{3}$，得出 $S_+=\frac{2.5}{7/3}\approx 1.071>1$。當 $u=-1$：$d_1=\frac{5}{6}$，所以 $2<3d_1=2.5<4$，所需時間是 3，得出 $S_-=\frac{17/6}{3}\approx 0.944<1$。以數值方法逐步模擬這個運動，也得出相同的數值。
- 極限（limit）：當 $u\to 0$ 或 $|u|\to v$ 時，兩個平均速率都趨向 $\frac{1}{2}v$，這正是由靜止起步、最後停下的簡單旅程的平均速率。在容許範圍的邊界上，各個不等式也變成等式：在兩個部分中，當 $u\to 0$ 時 $3d_1\to d_2$；在第 (ii) 部分中，當 $u\to -v$ 時 $3d_1\to 2d_2$。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分使用 $d_1 = \frac{v^2-u^2}{6a}$。這是位移，而且會再次得出 $3d_1 < d_2$，與題目要求證明的結果矛盾。
- 以為 $u < 0$ 時，時間也需要分段計算。其實不必：$v = u + 3at_1$ 在經過折返點前後一直成立。

STEP 之外

位移與距離之別，就是 $\int v\,\mathrm{d}t$ 與 $\int |v|\,\mathrm{d}t$ 之別。後者是路徑的弧長（arc length），也就是汽車里程錶所量度的數值。在大學的力學課程中，弧長成為描述彎曲軌跡的自然參數，由此引出加速度的切向分量（tangential component）和法向分量（normal component）。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）正是以這種方式建立運動學（kinematics）的。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。