詳細解答

# STEP I 2004，第 1 題

純數學 • 根式與立方根

> **STEP I 2004，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q1

## 關鍵思路

形如 $a+b\sqrt{n}$（其中 $a$、$b$ 為整數）的數，本身就像一個小小的數系：兩個這樣的數相乘，結果仍是同一形式；而兩個這樣的數相等，當且僅當它們的有理部分（rational part）相同，且 $\sqrt{n}$ 部分亦相同。第 (i) 部分是熱身，把這樣的一個數立方；第 (ii) 部分則透過比較各部分，把這個過程倒過來做。第 (iii) 部分是一條關於 $x^3$ 的二次方程，而它的根原來正是第 (ii) 部分求得的立方。

## 解答

### 第 (i) 部分

由二項式定理（binomial theorem），並利用 $(2\sqrt{5})^2 = 20$ 及 $(2\sqrt{5})^3 = 40\sqrt{5}$，

$$\begin{aligned}\left(3+2\sqrt{5}\right)^3 &= 3^3 + 3\cdot 3^2\cdot 2\sqrt{5} + 3\cdot 3\cdot 20 + 40\sqrt{5}\\ &= 27 + 54\sqrt{5} + 180 + 40\sqrt{5}\\ &= 207 + 94\sqrt{5}.\end{aligned}$$

所以 $a = 207$，$b = 94$。

### 第 (ii) 部分

把 $\sqrt{5}$ 換成 $\sqrt{2}$，同樣展開，對任意 $c$ 和 $d$ 可得

$$\begin{aligned}\left(c-d\sqrt{2}\right)^3 &= c^3 - 3c^2d\sqrt{2} + 3c\cdot 2d^2 - 2d^3\sqrt{2}\\ &= \left(c^3+6cd^2\right) - \left(3c^2d+2d^3\right)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

由於實立方根（real cube root）是唯一的，我們需要 $(c-d\sqrt{2})^3 = 99-70\sqrt{2}$。

**想一想** 為甚麼可以把有理部分和 $\sqrt{2}$ 部分分開比較？

若 $p+q\sqrt{2} = r+s\sqrt{2}$，其中 $p,q,r,s$ 為整數且 $q \neq s$，則 $\sqrt{2} = (p-r)/(s-q)$ 便是有理數，但事實並非如此。所以 $q = s$，從而 $p = r$。因此我們需要

$$c^3 + 6cd^2 = 99, \qquad 3c^2d + 2d^3 = 70.$$

由於 $c$ 和 $d$ 均為正數，第一條方程迫使 $c^3 < 99$，故 $c \leq 4$。把每個值逐一代入 $6cd^2 = 99 - c^3$：

- $c = 1$：$6d^2 = 98$，沒有整數解；
- $c = 2$：$12d^2 = 91$，沒有；
- $c = 3$：$18d^2 = 72$，故 $d = 2$；
- $c = 4$：$24d^2 = 35$，沒有。

唯一的可能是 $c = 3$，$d = 2$，而它也滿足第二條方程：$3\cdot 9\cdot 2 + 2\cdot 8 = 54 + 16 = 70$。因此

$$\sqrt[3]{99-70\sqrt{2}} = 3-2\sqrt{2}, \qquad c = 3,\ d = 2.$$

（順帶檢查一下正負號：$2\sqrt{2} \approx 2.83 < 3$，所以 $3-2\sqrt{2}$ 是正數，這與 $99-70\sqrt{2} \approx 0.005$ 是正數相符。）

### 第 (iii) 部分

設 $y = x^3$。方程變成 $y^2 - 198y + 1 = 0$，所以

$$y = \frac{198 \pm \sqrt{198^2-4}}{2} = 99 \pm \sqrt{99^2-1} = 99 \pm \sqrt{9800} = 99 \pm 70\sqrt{2},$$

當中用到 $9800 = 4900\cdot 2$。兩個值都是正實數。

由第 (ii) 部分，$99-70\sqrt{2} = (3-2\sqrt{2})^3$。至於另一個根，留意該二次方程兩根之積為 1，所以

$$99+70\sqrt{2} = \frac{1}{99-70\sqrt{2}} = \frac{1}{(3-2\sqrt{2})^3} = \left(3+2\sqrt{2}\right)^3,$$

因為 $(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) = 9-8 = 1$。（同樣地，在第 (ii) 部分的展開式中把 $d$ 的正負號改變，亦可直接得出 $(3+2\sqrt{2})^3 = 99+70\sqrt{2}$。）

每個實數恰好有一個實立方根，所以每個 $y$ 值恰好給出一個實數 $x$。兩個實數解是

$$x = 3-2\sqrt{2} \qquad \text{和} \qquad x = 3+2\sqrt{2}.$$

這條六次方程（sextic）其餘四個解都是複數：即每個 $y$ 餘下的立方根。

## 驗算

- 以數值計算，$(3+2\sqrt{5})^3 \approx 417.19$，而 $207+94\sqrt{5} \approx 417.19$。
- $3+2\sqrt{2} \approx 5.8284$，而 $x^6-198x^3+1$ 在此值處等於零（在捨入誤差範圍內）；在 $3-2\sqrt{2} \approx 0.1716$ 處亦然。
- 第 (iii) 部分兩個答案之積為 1，理應如此：若 $x$ 是根，則 $1/x$ 也是根，因為把方程除以 $x^6$，便得到關於 $1/x$ 的同一條方程。

## 常見錯誤

- 展開時忘記 $(d\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}\,d^3$，而不是 $\sqrt{2}\,d^3$。
- 由第一條方程求得 $c=3$，$d=2$，卻沒有驗證第二條方程。
- 在第 (iii) 部分給出六個「解」：每個正數只有一個立方根是實數。

## STEP 之外

所有形如 $a+b\sqrt{2}$（$a,b$ 為整數）的數組成的集合是一個環（ring），記作 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$，而 $3+2\sqrt{2}$ 是其中的一個單位（unit）：它在同一個環內有逆元（inverse）$3-2\sqrt{2}$。這類單位與佩爾方程（Pell's equation）$a^2-2b^2=\pm1$ 息息相關（留意 $99^2-2\cdot70^2=1$），而 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ 的每個單位都是 $\pm(1+\sqrt{2})^n$。想進一步了解，可參閱 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*，或 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。