詳細解答

STEP III 2003，第 9 題

力學 • 平衡的穩定性

> **STEP III 2003，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q9

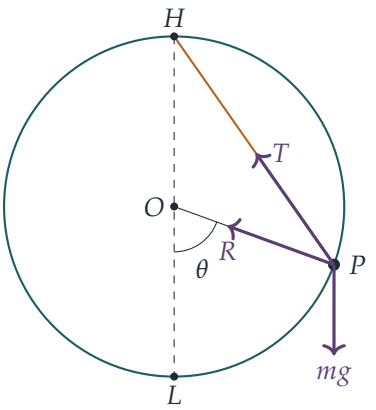
關鍵思路

金屬線是光滑的，所以它的反作用力（reaction）總是沿半徑方向，並不作功。因此一切都發生在切向（tangential）方向：把張力（tension）和重量沿切線分解，便得到一條關於 $\ddot{\theta}$ 的方程，平衡（equilibrium）位置和微小振動（small oscillations）都可由它求出。等腰三角形 OHP 的幾何性質提供了所需的全部角度。

解答

建立模型

把 P 看成光滑金屬線上的質點（particle），所以金屬線的反作用力 R 沿 PO 作用。繩子是輕繩，並服從胡克定律（Hooke's law）。取 $0 < \theta < \pi$，即 P 位於垂直直徑 LH 的其中一側。



由於 $OH = OP = a$，三角形 OHP 是等腰三角形，且 $\angle HOP = \pi - \theta$，所以它的兩個底角為

$$\angle OHP = \angle OPH = \tfrac{1}{2}\theta, \qquad HP = 2a\cos\tfrac{1}{2}\theta.$$

當 $HP > a$，即 $\cos\frac{1}{2}\theta > \frac{1}{2}$ 時，繩子處於繃緊（taut）狀態，這時由胡克定律得

$$T = \frac{\alpha mg}{a}(2a\cos\tfrac{1}{2}\theta - a) = \alpha mg(2\cos\tfrac{1}{2}\theta - 1).$$

現在沿 P 點的切線分解，取 θ 增加的方向（即朝向 H）為正。繩子與 PO 成 $\frac{1}{2}\theta$ 角，所以它與這條切線成 $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\theta$ 角，其切向分量為 $T\sin\frac{1}{2}\theta$。重量的切向分量為 $-mg\sin\theta$，而 R 沒有切向分量。切向加速度為 $a\ddot{\theta}$，故

$$\begin{aligned} ma\ddot{\theta} &= T\sin\tfrac{1}{2}\theta - mg\sin\theta \\ &= mg\Big[\alpha(2\cos\tfrac{1}{2}\theta - 1)\sin\tfrac{1}{2}\theta - 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta\Big], \end{aligned}$$

所以，只要繩子繃緊，

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{a}\sin\tfrac{1}{2}\theta\Big[2(\alpha-1)\cos\tfrac{1}{2}\theta - \alpha\Big]. \qquad (*)$$

（把能量 $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta + \frac{1}{2}\alpha mga(2\cos\frac{1}{2}\theta - 1)^2$ 求導，也會得到同一條方程。）

平衡位置

平衡時 $\ddot{\theta} = 0$。當 $0 < \theta < \pi$ 時，$\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$，所以我們需要

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \frac{\alpha}{2(\alpha-1)},$$

由於 $\alpha > 1$，這個式子是有意義的。要由此得到 $0 < \theta < \pi$，我們需要 $0 < \cos\frac{1}{2}\theta < 1$。這個值是正數，而

$$\frac{\alpha}{2(\alpha-1)} < 1 \iff \alpha < 2\alpha - 2 \iff \alpha > 2.$$

我們還需要繩子在該處繃緊，因為 $(*)$ 是在這個假設下得出的：$\dfrac{\alpha}{2(\alpha-1)} > \dfrac{1}{2} \iff \alpha > \alpha - 1$，這恆成立。所以若 $\alpha > 2$，便存在一個滿足 $0 < \theta < \pi$ 的平衡位置，正如題目所求。

想一想 假如繩子在平衡位置是鬆弛（slack）的，會怎樣？

那樣就只有重力有切向分量，而 $-mg\sin\theta = 0$ 在 $0 < \theta < \pi$ 內無解。這就是為甚麼我們求得的平衡位置自動滿足 $\cos\frac{1}{2}\theta > \frac{1}{2}$ 這一點如此重要。

當 $\alpha = 2+\sqrt{2}$ 時的微小振動

這時

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \frac{2+\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以平衡位置在 $\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{4}\pi$，即 $\theta = \frac{1}{2}\pi$，此時 P 與 O 處於同一水平。設 $\theta = \frac{1}{2}\pi + \phi$，則 $\ddot{\theta} = \ddot{\phi}$。把 $(*)$ 寫成 $\ddot{\theta} = \frac{g}{a} f(\theta)$，其中 $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$。當 ϕ 很小時，

$$f(\tfrac{1}{2}\pi + \phi) \approx f'(\tfrac{1}{2}\pi)\,\phi.$$

由於 $(*)$ 中的方括號在 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ 時等於零，使用乘積法則（product rule）後只剩下一項：

$$f'(\tfrac{1}{2}\pi) = \sin\tfrac{1}{4}\pi \cdot \left[-2(\alpha-1)\cdot\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{4}\pi\right] = -(\alpha-1)\sin^2\tfrac{1}{4}\pi = -\frac{\alpha-1}{2} = -\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

因此，當 ϕ 很小時，

$$\ddot{\phi} \approx -\frac{g(\sqrt{2}+1)}{2a}\,\phi$$

正如題目所求。

最後部分

ϕ 的係數是負數，所以質點受到微小位移後，會圍繞 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ 作（近似的）簡諧運動（simple harmonic motion）：這個平衡是穩定（stable）的。角頻率（angular frequency）為 $\omega = \sqrt{g(\sqrt{2}+1)/(2a)}$，所以週期（period）為

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{(\sqrt{2}+1)g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2(\sqrt{2}-1)a}{g}},$$

而振幅（amplitude）會一直保持很小，因為能量守恆（金屬線光滑，繩子具彈性，所以沒有任何東西耗散能量）。

驗算

- 當 $\alpha = 2$ 時，平衡位置的公式給出 $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$，即 $\theta = 0$：平衡位置與最低點重合，這與條件 $\alpha > 2$ 吻合。
- 當 $\alpha \to \infty$ 時，$\cos\frac{1}{2}\theta \to \frac{1}{2}$，所以 $\theta \to \frac{2}{3}\pi$ 而 $HP \to a$：非常硬的繩子幾乎不會伸長。
- 取 $a = 1.3\,\mathrm{m}$ 和 $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，由 $\phi = 0.01$ 開始對完整的方程 $(*)$ 作數值逐步計算，得到週期約為 $2.0819\,\mathrm{s}$，與 $2\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)a/g} \approx 2.0818\,\mathrm{s}$ 相符。

常見錯誤

- 使用 $HP = 2a\sin\frac{1}{2}\theta$：那是弦 LP 的長度，而不是 HP。三角形 OHP 中位於 O 的角是 $\pi - \theta$。
- 忘記檢查繩子在平衡位置是否繃緊，因為鬆弛的繩子沒有張力。
- 沿徑向而不是沿切向分解：徑向方程會引入未知的反作用力 R，而且完全沒有提供關於 $\ddot{\theta}$ 的資訊。

STEP 之外

在平衡位置附近作線性化（linearising），$\ddot{\phi} \approx f'(\theta_0)\,\phi$，是研究任何動力系統（dynamical system）穩定性的標準第一步：$f'(\theta_0)$ 的正負號（等價地，就勢能（potential energy）而言，是 $V''(\theta_0)$ 的正負號）決定了系統是振動還是一去不返。在大學一年級的課程中，這會發展成非線性常微分方程（nonlinear ODEs）的相平面（phase plane）分析。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）透過勢能來處理穩定平衡附近的微小振動，講解得十分清楚。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。