詳細解答

STEP III 2003，第 8 題

純數學 • 一階微分方程

STEP III 2003，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/03-s3-q8

關鍵思路

第 (i) 部分是隱函數求導（implicit differentiation），但它其實是一個技巧的示範：曲線族 $(y+ax)^n(y+bx)=c$ 的斜率（gradient）是 x 和 y 的兩個線性式之比。第 (ii) 部分則把這個技巧倒過來用。我們對一般的曲線族求導，讀出以 a、b 和 n 表示的斜率，再選取這些數值，使它與題目給出的方程吻合。一旦吻合，這個式子沿每一條解曲線（solution curve）都是常數，而這個常數關係就是通解（general solution）。

解答

第 (i) 部分

利用乘積法則（product rule）和鏈式法則（chain rule），把 $(y+2x)^3(y-4x)=c$ 對 x 求導，並以 y' 表示 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

$$3(y+2x)^2(y'+2)(y-4x)+(y+2x)^3(y'-4)=0.$$

在 $y+2x\neq 0$ 的點上，我們可以除以 $(y+2x)^2$：

$$3(y'+2)(y-4x)+(y+2x)(y'-4)=0.$$

把含 y' 的項合併，

$$y'[3(y-4x)+(y+2x)]=-6(y-4x)+4(y+2x),$$
$$y'(4y-10x)=32x-2y,$$

再把分子和分母同除以 2，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{16x-y}{2y-5x},$$

這正是所求。（在直線 $y = -2x$ 上，曲線的 $c = 0$，而公式在那裏仍然給出正確的斜率 -2。）

第 (ii) 部分

設 $F = (y+ax)^n(y+bx)$，其中 y 是 x 的函數。與第 (i) 部分完全一樣，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} &= n(y+ax)^{n-1}(y'+a)(y+bx) + (y+ax)^n(y'+b)\\ &= (y+ax)^{n-1}\Big[y'((n+1)y+(nb+a)x) + (na+b)y + (n+1)ab\,x\Big].\end{aligned}$$

因此，在 $y = -ax$ 以外，F 沿一條曲線為常數，當且僅當

$$y' = -\frac{(na+b)y + (n+1)ab\,x}{(n+1)y + (nb+a)x}. \qquad (*)$$

（第 (i) 部分就是 $a = 2$、$b = -4$、$n = 3$ 的情況，得出 $(32x-2y)/(4y-10x)$。）

> **想一想** 一個分數可以有很多種寫法，那麼我們怎樣把 $(*)$ 與 $\dfrac{10x-4y}{3x-y}$ 配對起來？

分子和分母同乘一個數，分數的值不變，所以我們只能在相差一個公因子的意義下把兩者配對。把目標寫成 $-(4y-10x)/(y-3x)$，再把分子和分母同乘 $k = n+1$，使兩個分母中 y 的係數相同。於是我們需要

$$na+b = -4(n+1), \qquad (n+1)ab = 10(n+1), \qquad nb+a = -3(n+1).$$

由於 $n+1 \neq 0$（若 $n = -1$，$(*)$ 的分母便沒有 y 項），中間的方程給出 $ab = 10$。把首尾兩個方程相加，得 $(n+1)(a+b) = -7(n+1)$，所以 $a+b = -7$。因此 a 和 b 是 $t^2+7t+10 = 0$ 的根，即 -2 和 -5。把首尾兩個方程相減，得

$$(n-1)(a-b) = -(n+1).$$

- 取 $a = -5$、$b = -2$：$-3(n-1) = -(n+1)$，所以 $n = 2$。
- 取 $a = -2$、$b = -5$：$3(n-1) = -(n+1)$，所以 $n = \frac{1}{2}$。

兩種選擇描述的是同一批曲線，因為把 $(y-2x)^{1/2}(y-5x) = c$ 兩邊平方便得 $(y-5x)^2(y-2x) = c^2$。我們取 $n = 2$，這樣可以避開平方根。

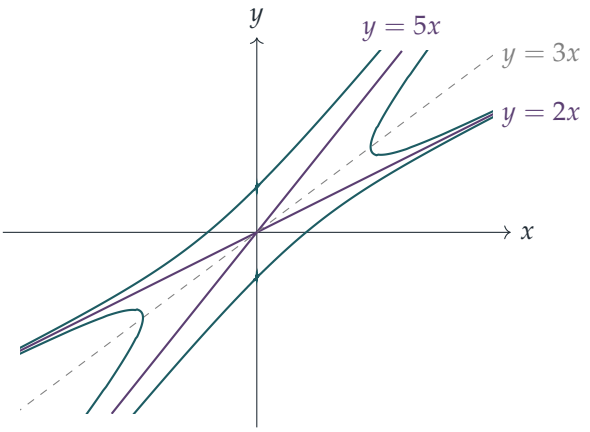
為穩妥起見，我們直接驗證。設 $G = (y-5x)^2(y-2x)$，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x} &= (y-5x)\big[2(y'-5)(y-2x) + (y-5x)(y'-2)\big]\\ &= (y-5x)\big[3y'(y-3x) - 12y + 30x\big]\\ &= 3(y-5x)\big[y'(y-3x) - (4y-10x)\big].\end{aligned}$$

若 y 滿足該微分方程（differential equation），則 $y'(y-3x)=4y-10x$，所以方括號內的式子等於零，$\mathrm{d}G/\mathrm{d}x=0$。因此 G 在每一條解曲線上都是常數，通解為

$$\boxed{(y-5x)^2(y-2x)=C}$$

其中 C 為任意常數。$C=0$ 給出直線 $y=5x$ 和 $y=2x$。兩者確實都是解：在 $y=2x$ 上，右邊是 $2x/x=2$；在 $y=5x$ 上，右邊是 $(-10x)/(-2x)=5$。所有曲線在與直線 $y=3x$ 相交之處都有鉛垂切線，而方程在該直線上沒有定義。



曲線 $(y-5x)^2(y-2x)=\pm1$（藍綠色）和 $C=0$ 的直線解（紫紅色）。位於兩條直線之間的分支，在與虛線 $y=3x$ 相交之處有鉛垂切線。

第 (ii) 部分的另一種解法

右邊只取決於 y/x，所以代換 $y=vx$ 同樣可行。它給出

$$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{(v-2)(v-5)}{3-v},$$

分離變數（separating the variables）並運用部分分式（partial fractions），可得 $\ln|x|=-\frac{1}{3}\ln|v-2|-\frac{2}{3}\ln|v-5|+$ 常數，整理後得到相同的答案。題目所用的方法則無須用到部分分式。

驗算

- 第 (i) 部分本身就是對 $(*)$ 的一次驗算：把 $a=2$、$b=-4$、$n=3$ 代入，便重現該處求得的斜率。
- 在點 $(1,0)$，方程給出斜率 $10/3$。在該點對 $(y-5x)^2(y-2x)=C$ 作隱函數求導，得 $(-5)\big[2(y'-5)(-2)+(-5)(y'-2)\big]=0$，所以 $-9y'+30=0$，$y'=10/3$。

- 數值方面，我們用龍格—庫塔法（Runge–Kutta method）從五十個隨機起點逐步求解該微分方程。沿每一條路徑，$(y-5x)^2(y-2x)$ 的值都保持不變，誤差約為 10^{-13}。

常見錯誤

- 不考慮公因子，直接把 $(*)$ 的係數與 $10x-4y$ 和 $3x-y$ 配對，結果得出互相矛盾的方程。
- 把答案留作 $(y-2x)^{1/2}(y-5x)=c$，而沒有留意到它其實是同一個曲線族；而且除非小心處理正負號，否則還會漏掉 $y<2x$ 的解。
- 忘記 $C=0$ 是容許的，它給出直線解 $y=2x$ 和 $y=5x$。

STEP 之外

這裏的方程是*齊次*（homogeneous）的：右邊只取決於 y/x。尋找一個沿着解保持不變的函數 $G(x,y)$，正是*恰當方程*（exact equations）和*積分因子*（integrating factors）背後的想法。在力學中，同樣的想法就是尋找能量之類的守恆量（conserved quantities）。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）在開首幾章便涵蓋了這兩個課題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。