詳細解答

STEP III 2003，第 7 題

純數學 • 西姆松線

> **STEP III 2003，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q7

關鍵思路

要找垂足（foot of the perpendicular），可從 P 出發，沿直線的法線（normal）方向一直走到碰上該直線為止，所以寫 $N = P + \lambda(\text{法向量})$，再解出 λ。至於第二部分，關於 s 和 t 的條件是兩個斜率（gradient）之積等於 -1：它說明 PA 與 PB 互相垂直。把它化成圓的方程後，正好令共線（collinear）的驗證迎刃而解。

解答

N 的坐標

直線 AB 的方程為 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$，即

$$bx + ay = ab.$$

這條直線的一個法向量（normal vector）是 (b, a)，所以由 P 所作垂線的垂足 N 具有以下形式：

$$N = (s + \lambda b,\ t + \lambda a)$$

其中 λ 為某個數。由於 N 在 AB 上，

$$b(s + \lambda b) + a(t + \lambda a) = ab \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{ab - bs - at}{a^2 + b^2}.$$

因此

$$x = s + \lambda b = \frac{s(a^2 + b^2) + ab^2 - b^2 s - abt}{a^2 + b^2} = \frac{ab^2 - abt + a^2 s}{a^2 + b^2} = \frac{ab^2 - a(bt - as)}{a^2 + b^2},$$

$$y = t + \lambda a = \frac{t(a^2 + b^2) + a^2 b - abs - a^2 t}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b + b^2 t - abs}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b + b(bt - as)}{a^2 + b^2},$$

這正是所需的結果。

N 在 XY 上

首先看看這個條件說的是甚麼。要令它有意義，必須有 $s \neq 0$ 及 $s \neq a$；又因為乘積是 -1 而不是 0，所以還有 $t \neq 0$ 及 $t \neq b$。展開後得

$$t(t-b) = -s(s-a) \quad \Longleftrightarrow \quad s^2 + t^2 = as + bt. \tag{$*$}$$

現在 $X = (s, 0)$，$Y = (0, t)$。由於 $s \neq 0$ 及 $t \neq 0$，這是兩個不在原點的相異點，而直線 XY 為

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = 1, \qquad \text{即} \qquad tx + sy = st.$$

所以我們要證明 N 的坐標滿足 $tx + sy = st$。

> **想一想** 我們應該直接代入然後聽天由命，還是有更整潔的方法去整理這些代數運算？

為求簡潔，設 $k = bt - as$。利用上面的公式，

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(tx+sy) &= t(ab^2 - ak) + s(a^2b + bk) \\ &= ab^2t + a^2bs + k(bs - at).\end{aligned}$$

最後那個乘積展開後十分整齊：

$$k(bs-at) = (bt-as)(bs-at) = b^2st - abt^2 - abs^2 + a^2st = (a^2+b^2)st - ab(s^2+t^2).$$

因此

$$(a^2+b^2)(tx+sy) = (a^2+b^2)st + ab(as + bt - s^2 - t^2).$$

這對任何 P 都成立。根據 $(*)$，括號內的式子等於零，所以 $tx + sy = st$，即 N 在直線 XY 上。

幾何意義

PB 的斜率是 $\dfrac{t-b}{s}$，PA 的斜率是 $\dfrac{t}{s-a}$，所以該條件說的是 $PA \perp PB$：角 APB 是直角。等價地，$(*)$ 可寫成

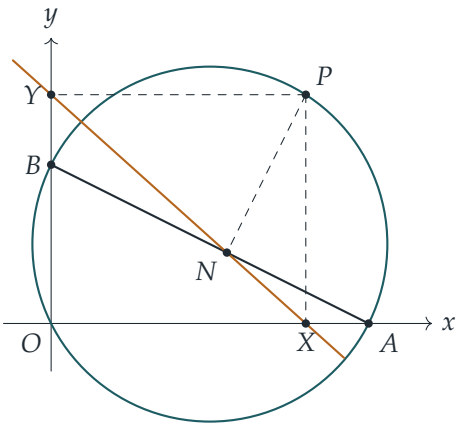
$$\left(s - \tfrac{a}{2}\right)^2 + \left(t - \tfrac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{4},$$

所以 P 在以 AB 為直徑的圓上。由於角 AOB 也是直角，這個圓通過 O：它就是三角形 OAB 的外接圓（*circumcircle*）。

X、Y 和 N 三點，分別是由 P 到三角形三邊 OA、OB 和 AB 所作垂線的垂足。所以這個結果說的是：

若 P 在一個三角形的外接圓上，則由 P 到三邊（有需要時延長）所作垂線的垂足共線。

這就是西姆松線（*Simson line*）定理，這裏證明的是直角三角形的情況，而直角頂點放在原點。



取 $a = 4$，$b = 2$：P 在通過 O、A、B 的圓上；直線 XY（琥珀色）通過 N。

驗算

- 取 $P = O$，即 $s = t = 0$：公式給出 $N = \left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$，它既在 $bx + ay = ab$ 上，也在通過 O 且垂直於 AB 的直線 $y = \frac{a}{b}x$ 上，與預期相符。
- 取 $a = 4$，$b = 2$，以及圓上的點 $P = (2 + \sqrt{5}\cos 1,\ 1 + \sqrt{5}\sin 1) \approx (3.208, 2.882)$，公式給出 $N \approx (2.214, 0.893)$，而 $\frac{2.214}{3.208} + \frac{0.893}{2.882} \approx 0.690 + 0.310 = 1$，所以 N 在 XY 上。
- 恆等式 $(a^2 + b^2)(tx + sy - st) = ab(as + bt - s^2 - t^2)$ 同時給出逆命題（converse）：若 P 不在坐標軸上，則僅當 P 在圓上時，N 才在 XY 上。

常見錯誤

- 把 (a, b) 當作 AB 的法向量。AB 的方向是 $(-a, b)$，所以法向量是 (b, a)。
- 一次過把所有東西展開，結果淹沒在算式之中。正如題目給出的答案所提示，把 $bt - as$ 當作一個符號來處理，代數運算只需寥寥數行。

► 寫到「角 APB 是直角」便停筆。題目想要的幾何意義是西姆松線：X、Y、N 是到三角形 OAB 三邊所作垂線的垂足。

STEP 之外

西姆松線對任何三角形都成立，其綜合幾何證明（synthetic proof）用到圓內接四邊形（cyclic quadrilateral）和同弓形內的圓周角相等。它的逆命題也成立，而當 P 沿外接圓移動時，各條西姆松線的包絡（envelope）是一條三尖瓣線（deltoid，即施泰納內擺線，Steiner's hypocycloid）。坐標法和複數法令這類結果變得按部就班便可推出；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）展示了複數如何優雅地處理圓的幾何，而 Coxeter 與 Greitzer 的 *Geometry Revisited*（《幾何學的新探索》）則涵蓋西姆松線以及更多經典的三角形幾何。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。