詳細解答

STEP III 2003，第 6 題

純數學 • 三角函數裂項相消求和

> **STEP III 2003，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q6

關鍵思路

各項角度以相等間隔遞增的餘弦之和，照原樣處理並不方便；但只要把每一項都乘以 $2\sin\frac{1}{2}\theta$，每個餘弦就會變成兩個正弦之*差*，整個和式隨即可以裂項相消（telescoping）。餘下的是兩個正弦之差，再用和差化積公式（factor formula）便可化為乘積。令一個乘積等於零，是很容易處理的事。唯一要留神的是：我們乘上了 $\sin\frac{1}{2}\theta$，而它本身也可能等於零。

解答

恆等式

利用 $\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$，取 $A=r\theta$ 及 $B=\frac{1}{2}\theta$：

$$\sin\left(r+\tfrac{1}{2}\right)\theta-\sin\left(r-\tfrac{1}{2}\right)\theta=2\cos r\theta\,\sin\tfrac{1}{2}\theta,$$

這就是所需的結果。

級數求和

記

$$S(\theta)=\sum_{r=a}^{b-1}\cos r\theta.$$

乘以 $2\sin\frac{1}{2}\theta$，並對由 a 至 $b-1$ 的每個 r 使用上述恆等式（identity），

$$\begin{aligned} 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\, S(\theta) &= \sum_{r=a}^{b-1}\Big[\sin(r+\tfrac{1}{2})\theta - \sin(r-\tfrac{1}{2})\theta\Big] \\ &= \sin(b-\tfrac{1}{2})\theta - \sin(a-\tfrac{1}{2})\theta, \end{aligned}$$

因為每個 $\sin(r+\frac{1}{2})\theta$ 都與下一項的 $-\sin((r+1)-\frac{1}{2})\theta$ 互相抵消，最後只剩下末項的上端和首項的下端。

現在使用 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$，其中 $\frac{P+Q}{2} = \frac{1}{2}(a+b-1)\theta$ 及 $\frac{P-Q}{2} = \frac{1}{2}(b-a)\theta$：

$$\sin\tfrac{1}{2}\theta\, S(\theta) = \cos\tfrac{1}{2}(a+b-1)\theta\ \sin\tfrac{1}{2}(b-a)\theta. \qquad (*)$$

解 $S(\theta) = 0$

> **想一想** 我們可以直接把 $(*)$ 除以 $\sin\frac{1}{2}\theta$ 嗎？

只有當 $\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$，即 θ 不是 2π 的倍數時才可以。所以我們先處理這些值。若 $\theta = 2m\pi$，其中 m 為整數，則每一項 $\cos r\theta$ 都等於 1，故 $S(\theta) = b-a \geq 2$。這些值永遠不是解。

對於其餘所有 θ，我們有 $\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$，而由 $(*)$ 可得

$$S(\theta) = 0 \iff \cos\tfrac{1}{2}(a+b-1)\theta = 0 \text{ 或 } \sin\tfrac{1}{2}(b-a)\theta = 0.$$

- $\cos\frac{1}{2}(a+b-1)\theta = 0$ 當且僅當 $\frac{1}{2}(a+b-1)\theta = (k+\frac{1}{2})\pi$，即

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{a+b-1}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

  （注意 $a+b-1 \geq 3$，所以我們並沒有除以零。）這些值全都不是 2π 的倍數：否則須有 $2k+1 = 2m(a+b-1)$，即一個奇數等於一個偶數。所以它們全部都是解。

- $\sin\frac{1}{2}(b-a)\theta = 0$ 當且僅當 $\frac{1}{2}(b-a)\theta = k\pi$，即

$$\theta = \frac{2k\pi}{b-a}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

  這個值是 2π 的倍數，當且僅當 $b-a$ 整除 k，而我們已經知道這些值並不是解。所以必須把它們剔除。

> **想一想** 在 2π 的倍數處，$(*)$ 看來是成立的，為甚麼仍要把它們從第二族解中剔除？

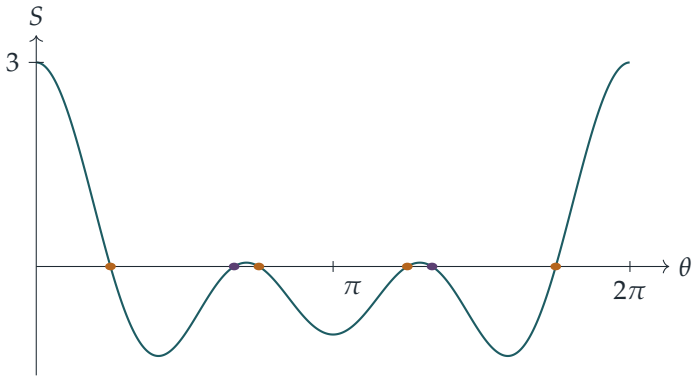
在 $\theta = 2m\pi$ 處，不論 S 取甚麼值，$(*)$ 的兩邊都是零，所以 $(*)$ 在這些位置完全沒有告訴我們關於 S 的任何資料。這只是全式乘以 $\sin\frac{1}{2}\theta$ 所造成的假象。由於 $b-a \geq 2$，第二族之中仍然有真正的解，例如 $\theta = 2\pi/(b-a)$。

綜合以上所得，全部的解正好是

$$\boxed{\theta = \frac{(2k+1)\pi}{a+b-1}\ (k \in \mathbb{Z}) \qquad \text{或} \qquad \theta = \frac{2k\pi}{b-a}\ (k \in \mathbb{Z},\ b-a \nmid k).}$$

這兩族解可能有重疊。這並無大礙，因為同時屬於兩族的值仍然只算一個解。

舉例來說，當 $a=1$ 及 $b=4$ 時，方程是 $\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$。在 $(0, 2\pi)$ 內，它的根有來自第一族的 $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$，以及來自第二族的 $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$。注意 $\theta = 0$ 和 $\theta = 2\pi$ 並不包括在內，該處 $S = 3$。



曲線 $S = \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta$：琥珀色的根來自餘弦因子，紫紅色的根來自正弦因子。

驗算

- 取 $a=1$、$b=4$：在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 處，$\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$；在 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 處，$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0$。
- 以數值方法檢驗，對多組 a, b 隨機選取 θ，$(*)$ 均成立。對所有 $1 \leq a \leq 6$、$a+2 \leq b \leq 11$，在 $(0, 6\pi)$ 上對 S 作細密掃描，找到的根與公式所給出的完全一致，再無其他。例如當 $a=1$、$b=3$ 時，根 $\theta = 13\pi/3 \approx 13.6136$ 來自第一族。

常見錯誤

- 未經檢查便把 $(*)$ 除以 $\sin\frac{1}{2}\theta$，因而把 $\theta = 2m\pi$ 也算作解；在這些位置 $S = b - a \neq 0$。

- 弄錯裂項相消後剩下的首末兩項：它們是 $\sin\left(b-\frac{1}{2}\right)\theta$ 和 $\sin\left(a-\frac{1}{2}\right)\theta$，因為最後一個餘弦是 $\cos(b-1)\theta$。
- 只給出某一區間（例如 $[0, 2\pi)$）內的解，但題目要求的是全部的解。

STEP 之外

$\sum\cos r\theta$ 的閉合形式（closed form），其實是以 $e^{i\theta}$ 為公比的等比級數（geometric series）的實部。取 $a=-n$ 及 $b=n+1$，便得到狄利克雷核（Dirichlet kernel）$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta / \sin\frac{1}{2}\theta$，它是傅立葉級數（Fourier series）理論以及其收斂（converge）問題的核心。想明白為何這類三角和一旦改用 $e^{i\theta}$ 來處理就會變得簡單，Needham 的 *Visual Complex Analysis* 是很好的入門讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。