詳細解答

STEP III 2003，第 5 題

純數學 • 三次方程的根

> **STEP III 2003，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q5

關鍵思路

從圖像入手數算根（root）的個數。首項係數（leading coefficient）為正的二次函數，其圖像與 x 軸相交兩次，當且僅當其極小值位於該軸下方。首項係數為正的三次函數，其圖像與該軸相交三次，當且僅當其極大值在軸的上方而極小值在軸的下方。要令所有根皆為正數，就要看轉向點（turning point）位於 y 軸的哪一側，以及曲線與 y 軸相交處的正負號。最後一條方程其實是經過平移的三次曲線的一個喬裝例子：配立方（complete the cube）便可把它化成該形式。

解答

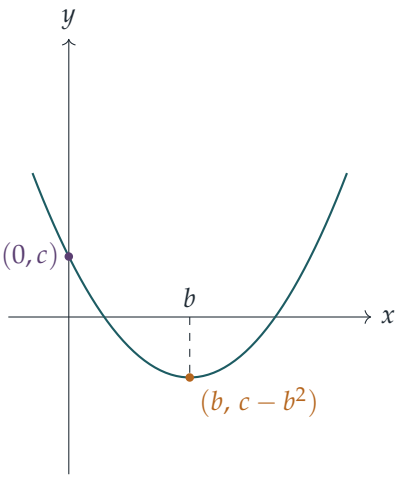
二次函數

配方（completing the square）得

$$y = x^2 - 2bx + c = (x - b)^2 + c - b^2,$$

所以轉向點（極小點）位於 $(b,\ c - b^2)$。

當有兩個相異實根時，曲線是一條 $\cup$ 形的拋物線（parabola），對稱於 $x = b$，其頂點（vertex）位於 x 軸下方。它與 y 軸相交於 $(0, c)$。



兩個相異實根。拋物線的首項係數為正，所以當 $x \to \pm\infty$ 時 $y \to +\infty$，而它的最小值是 $c - b^2$。若 $c - b^2 < 0$，曲線會降至軸的下方，然後在 $x = b$ 的兩側各自回升，因此與軸相交兩次。若 $c - b^2 = 0$，曲線僅與軸相切（重根（repeated root））；若 $c - b^2 > 0$，則曲線與軸永不相遇。所以條件是

$$b^2 > c.$$

兩個相異正根。我們斷言條件是

$$b^2 > c, \qquad b > 0, \qquad c > 0.$$

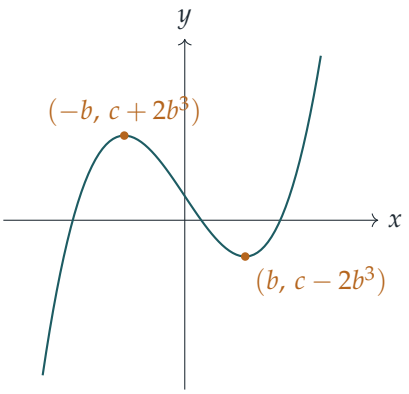
必要性（necessary）：兩根 α, β 滿足 $\alpha + \beta = 2b$ 及 $\alpha\beta = c$，若兩根皆為正數，則這兩個量亦皆為正數。**充分性（sufficient）：**若 $b^2 > c$，則有兩個根，分別位於 $x = b$ 的兩側。由於 $b > 0$，右邊的根是正數。左邊的根位於曲線遞減的區間內；曲線在 $x = 0$ 處為正（高度為 $c > 0$），在 $x = b > 0$ 處為負，所以這個根嚴格介乎 0 與 b 之間，因而也是正數。

三次函數

對於 $y = x^3 - 3b^2x + c$，我們有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 - 3b^2 = 3(x - b)(x + b)$，它在 $x = \pm b$ 時等於零。代入得

$$x = -b:\ y = -b^3 + 3b^3 + c = c + 2b^3, \qquad x = b:\ y = b^3 - 3b^3 + c = c - 2b^3.$$

由於 $b > 0$，轉向點分別是位於 $(-b,\ c + 2b^3)$ 的極大點和位於 $(b,\ c - 2b^3)$ 的極小點：導數（derivative）在 $x < -b$ 時為正，在兩者之間為負，在 $x > b$ 時為正。



曲線由 $-\infty$ 上升至極大點，下降至極小點，然後上升至 $+\infty$，而且在這三段上各自嚴格單調（strictly monotonic）。所以曲線在每一段上各有一個根，從而共有三個相異的根，當且僅當極大值在軸的上方而極小值在軸的下方：

$$c+2b^3>0 \text{ 及 } c-2b^3<0, \qquad \text{即} \qquad -2b^3<c<2b^3.$$

若其中一個轉向點的函數值為零，便會得到重根；若兩者同為嚴格的正數或同為嚴格的負數，則只有一個實根。所以 $|c|<2b^3$ 是充分必要條件。

平移後的三次曲線的三個相異正根

曲線 $y=(x-a)^3-3b^2(x-a)+c$ 是把上一條曲線向右平移（translate）a 而得（我們仍假設 $b>0$）。所以它有三個相異實根，當且僅當 $|c|<2b^3$；這時它的極大點在 $x=a-b$，極小點在 $x=a+b$，而三個根 $x_1<x_2<x_3$ 滿足

$$x_1<a-b<x_2<a+b<x_3.$$

三個根全為正數，當且僅當最小的根 x_1 為正數。記

$$y(0)=(-a)^3-3b^2(-a)+c=c-a^3+3ab^2$$

為曲線與 y 軸相交處的高度。我們斷言條件是

$$|c|<2b^3, \qquad a>b, \qquad c<a^3-3ab^2.$$

? **想一想** 為甚麼單憑「$y(0)<0$」並不足以保證三個根全都在原點的右方？

因為 y 在 x_2 與 x_3 之間同樣是負數。在 $x=0$ 處取負值，有可能表示原點位於中間的根與最大的根之間。我們還須知道 0 位於曲線第一段上升的部分，即極大點的左方。這正是 $a>b$ 的作用。

必要性。假設有三個相異正根。那麼由上一部分可知 $|c| < 2b^3$。此外 $0 < x_1 < a - b$，所以 $a > b$。最後，y 在 $(-\infty, a-b]$ 上嚴格遞增，而 $y(x_1) = 0$，所以 $y(0) < 0$，因為 $0 < x_1$。由此得 $c < a^3 - 3ab^2$。

充分性。假設三個條件全部成立。這時有三個相異實根，而且 $0 < a - b$，所以 0 位於 $(-\infty, a-b]$ 內，而 y 在此區間上嚴格遞增。由於 $y(0) < 0 = y(x_1)$，我們得到 $0 < x_1$，因此三個根全為正數。

所以該方程有三個相異正根，當且僅當

$$a > b \quad \text{及} \quad -2b^3 < c < \min(2b^3,\ a^3 - 3ab^2).$$

（由於當 $a > b > 0$ 時 $a^3 - 3ab^2 + 2b^3 = (a-b)^2(a+2b) > 0$，上述對 c 的上下界並無矛盾。）

最後的方程

先除以 2，然後配立方。$(x-a)^3$ 中的 x^2 項是 $-3ax^2$，所以我們需要 $3a = \frac{9}{2}$，即 $a = \frac{3}{2}$。設 $x = t + \frac{3}{2}$，

$$\begin{aligned} x^3 - \tfrac{9}{2}x^2 + \tfrac{7}{2}x - \tfrac{1}{2} &= t^3 + (\tfrac{27}{4} - \tfrac{27}{2} + \tfrac{7}{2})t + (\tfrac{27}{8} - \tfrac{81}{8} + \tfrac{21}{4} - \tfrac{1}{2}) \\ &= t^3 - \tfrac{13}{4}t - 2, \end{aligned}$$

其中 t^2 項因 a 的選取而互相抵消。所以

$$2x^3 - 9x^2 + 7x - 1 = 0 \iff (x - \tfrac{3}{2})^3 - 3b^2(x - \tfrac{3}{2}) + c = 0, \qquad a = \tfrac{3}{2},\ b^2 = \tfrac{13}{12},\ c = -2,$$

其中 $b = \sqrt{13/12} > 0$。現在逐一檢查三個條件。

- $|c| < 2b^3$：這即是說 $2 < 2b^3$，亦即 $b^2 > 1$，而這是成立的，因為 $b^2 = \frac{13}{12} > 1$。
- $a > b$：兩者皆為正數，而且 $a^2 = \frac{9}{4} = \frac{27}{12} > \frac{13}{12} = b^2$。
- $c < a^3 - 3ab^2$：這裏 $a^3 - 3ab^2 = a(a^2 - 3b^2) = \frac{3}{2}\left(\frac{9}{4} - \frac{13}{4}\right) = -\frac{3}{2}$，而 $-2 < -\frac{3}{2}$。

三個條件全部成立，所以 $2x^3 - 9x^2 + 7x - 1 = 0$ 有三個相異正根，正如所求。

驗算

- 正負號的變化可直接確認最後的答案。設 $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x - 1$，我們有 $p(0) = -1$、$p(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$、$p(1) = -1$、$p(3) = -7$ 及 $p(4) = 11$。所以在 $(0, \frac{1}{2})$、$(\frac{1}{2}, 1)$ 及 $(3, 4)$ 內各有一個根。它們的數值分別是 0.185、0.760 及 3.555。
- 數值 $y(0) = c - a^3 + 3ab^2 = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ 與首一（monic）三次多項式 $x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}$ 的常數項吻合，這是理所當然的。

- 以數千組隨機選取的 (a, b, c) 作測試，結果每一次都與上述條件相符。

常見錯誤

- 只用 $y(0) < 0$（或只用 $a > b$）來判斷根是否為正。兩者缺一不可：當原點位於較大的兩個根之間時，$y(0) < 0$ 同樣成立。
- 忘記了 $|c| \leq 2b^3$ 中等號成立時會得到重根，因此不算「三個相異的根」。
- 把平移的方向弄反：以 $x - a$ 表示的曲線，是把原來的曲線向*右*移動 a。

STEP 之外

任何三次多項式都可以像這裏一樣，藉着平移化成「缺項」(depressed) 形式 $t^3 + pt + q$。這時它有三個相異實根，當且僅當 $4p^3 + 27q^2 < 0$；取 $p = -3b^2$、$q = c$，這就是上文求得的條件 $c^2 < 4b^6$。$-(4p^3 + 27q^2)$ 這個量稱為*判別式*（discriminant），它是三次方程如何得以求解（卡爾達諾（Cardano）公式）這段故事的開端，最終更引出伽羅瓦理論（Galois theory）。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）是邁向該理論的理想下一步。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。