詳細解答

# STEP III 2003，第 4 題

純數學 • 參數曲線的切線

> **STEP III 2003，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q4

## 關鍵思路

直線與這條曲線相交之處，正是某個以參數為變量的三次式（cubic）等於零之處。切線（tangent）會在 $t$ 處產生一個二重根（double root），所以由根之和便可立即求出第三個根 $T$。$T$ 的公式看起來很像 tan 的倍角公式（double-angle formula），這提示我們設 $t = \tan\theta$：映射 $t \mapsto T$ 於是變成角度上的一個簡單線性映射，要把它迭代（iterate）便很容易。

## 解答

### $T$ 的公式

由於 $y = t + t^3$ 對 $t$ 嚴格遞增（strictly increasing），不同的參數（parameter）給出不同的點，所以曲線上的點與參數的值一一對應（one-to-one）。

求導可得 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 + 3t^2$，所以當 $t \neq 0$ 時，在 $t$ 處的切線的斜率（gradient）為

$$m = \frac{1 + 3t^2}{2t}.$$

（因為 $t \neq 0$，切線不是垂直的。）切線的方程是 $y - (t + t^3) = m(x - t^2)$。參數為 $s$ 的點在這條切線上，當且僅當

$$s + s^3 - (t + t^3) = m(s^2 - t^2), \qquad \text{即} \qquad f(s) \equiv s^3 - ms^2 + s - (t + t^3 - mt^2) = 0.$$

顯然 $f(t) = 0$，而根據 $m$ 的選取，$f'(t) = 3t^2 - 2mt + 1 = 0$。所以 $s = t$ 是這個三次式的（至少）二重根，而各根為 $t$, $t$, $T$，其中 $T$ 是某個實數。$s^3 - ms^2 + \ldots$ 的根之和是

$m$，所以

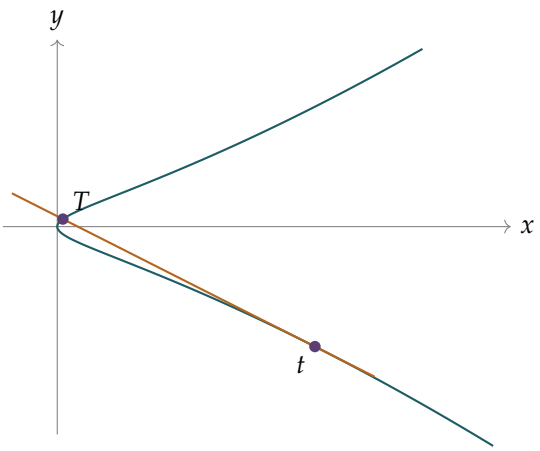
$$2t + T = \frac{1+3t^2}{2t}$$
$$T = \frac{1+3t^2-4t^2}{2t} = \frac{1-t^2}{2t}.$$

這個根 $T$ 是該直線與曲線唯一可能相交的另一處。

只有當 $T \neq t$ 時，切線才會與曲線再次相交。現在

$$T = t \iff 1 - t^2 = 2t^2 \iff 3t^2 = 1,$$

所以我們需要 $3t^2 \neq 1$。（當 $3t^2 = 1$ 時，$t$ 是三重根，切線只與曲線相接一次：這些正是拐點（points of inflection）。）這就證明了兩個結果。




**以 $t_0 = \tan\frac{7}{18}\pi$ 開始的數列**

設 $t = \tan\theta$。由倍角公式，

$$T = \frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta} = \frac{1}{\tan 2\theta} = \cot 2\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right).$$

所以若 $t_i = \tan\theta_i$，我們可以取 $\theta_{i+1} = \frac{\pi}{2} - 2\theta_i$。由於 tan 的週期（period）為 $\pi$，而且在任何長度為 $\pi$ 的區間上（除去 $\frac{\pi}{2}$ 的奇數倍）都是一對一的，兩個參數相等，當且僅當它們的角相差 $\pi$ 的倍數。

**想一想** 在迭代之前，我們必須檢查每個 $t_i$ 的甚麼性質，才能確保下一個點存在？

這個構作在每一步都需要 $t_i \neq 0$ 和 $3t_i^2 \neq 1$，即 $\theta_i$ 不是 $\frac{\pi}{2}$ 的倍數，也不是 $\pm\frac{\pi}{6}$ 加上 $\pi$ 的倍數。以 $\frac{\pi}{18}$ 的倍數計，我們必須避開模（modulo）18 下的 $0, \pm 3, \pm 9$。

由 $\theta_0 = \frac{7\pi}{18}$ 開始：

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{9\pi}{18} - \frac{14\pi}{18} = -\frac{5\pi}{18},\\ \theta_2 &= \frac{9\pi}{18} + \frac{10\pi}{18} = \frac{19\pi}{18} \equiv \frac{\pi}{18} \pmod{\pi},\\ \theta_3 &= \frac{9\pi}{18} - \frac{2\pi}{18} = \frac{7\pi}{18}.\end{aligned}$$

$7, -5, 1$ 都不在禁用之列，所以每一步都成立。因此 $t_3 = \tan\frac{7\pi}{18} = t_0$，即 $P_3 = P_0$。但 $\theta_1 - \theta_0 = -\frac{12\pi}{18}$ 不是 $\pi$ 的倍數，所以 $t_1 = \tan(-\frac{5\pi}{18}) < 0 < t_0$，而 $P_1 \neq P_0$。這三點的參數分別是 $\tan 70^\circ$、$-\tan 50^\circ$ 和 $\tan 10^\circ$。

### 第二個起始值

設 $g(\theta) = \frac{\pi}{2} - 2\theta$。迭代可得

$$g^2(\theta) = -\frac{\pi}{2} + 4\theta, \qquad g^3(\theta) = \frac{3\pi}{2} - 8\theta.$$

所以 $P_3 = P_0$ 當且僅當 $\frac{3\pi}{2} - 8\theta \equiv \theta \pmod{\pi}$，即 $9\theta \equiv \frac{3\pi}{2} \pmod{\pi}$，由此得

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{9} = \frac{(3+2k)\pi}{18}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

同理，$P_1 = P_0$ 當且僅當 $3\theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$，即 $\theta = \frac{(3+6j)\pi}{18}$。這些正是 $3 + 2k \equiv 3, 9, 15 \pmod{18}$ 的情況：它們給出 $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，或者根本沒有有限的 $t$，本來就已被排除。

在模 $\pi$ 之下，餘下的是 $\theta \in \{\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}\}$。要 $t_0 > 0$，我們需要 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，由此得 $\tan\frac{\pi}{18}$、$\tan\frac{5\pi}{18}$ 和題目給出的 $\tan\frac{7\pi}{18}$。$\tan\frac{\pi}{18}$ 這個值只是上述循環（cycle）中的 $P_2$。給出一個真正全新循環的值是

$$t_0 = \tan\frac{5\pi}{18} \ (= \tan 50^\circ),$$

其中 $\theta_0 = \frac{5\pi}{18}$，$\theta_1 = -\frac{\pi}{18}$，$\theta_2 = \frac{11\pi}{18}$，$\theta_3 = \frac{9\pi}{18} - \frac{22\pi}{18} = -\frac{13\pi}{18} \equiv \frac{5\pi}{18}$。$5, -1, 11$ 都不在禁用之列，而且 $t_1 = -\tan 10^\circ \neq t_0$。$\tan\frac{5\pi}{18}$ 或 $\tan\frac{\pi}{18}$ 都可以作為本題的答案。

> ? **想一想** 為甚麼可以「模 $\pi$」地處理角度？

因為我們唯一用到的就是 $t = \tan\theta$，而 $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$。把 $\theta_i$ 加上 $\pi$，$g(\theta_i)$ 便改變 $2\pi$，這並不改變 $t_{i+1}$。所以整個參數數列只取決於 $\theta_0$ 模 $\pi$ 的值。

## 驗算

▶ 取 $t = -1$ 可得 $T = 0$：在 $(1, -2)$ 處的切線斜率為 $-2$，而它確實通過原點。

- 以數值計算，$t_0 = \tan 70^\circ \approx 2.747477$ 給出 $t_1 \approx -1.191754$、$t_2 \approx 0.176327$ 和 $t_3 \approx 2.747477$。同樣地，$\tan 50^\circ \approx 1.191754 \to -0.176327 \to -2.747477 \to 1.191754$。
- 隨機選取 $t$，以數值方法解三次方程求另一個交點，結果與 $T = (1 - t^2)/(2t)$ 吻合。

## 常見錯誤

- 先求弦（chord）的斜率再令兩者相等，卻忘記約去因子 $T - t$。利用關於根之和的韋達公式（Vieta's formula），便可完全避開這個問題。
- 直接用小數對 $t$ 迭代這個映射，結果看不出精確的循環。正是代換 $t = \tan\theta$ 才令 $P_3 = P_0$ 精確成立。
- 把 $\tan\frac{\pi}{6}$ 當作第二個值：這時 $T = t$，所以根本沒有下一個點。

## STEP 之外

弦切構作法（chord-and-tangent construction）是橢圓曲線（elliptic curves）理論的核心：在該理論中，同一條「第三個交點」規則把三次曲線上的點變成一個羣（group）。這裏的曲線 $y^2 = x(1+x)^2$ 是一條奇異三次曲線（singular cubic）（它在 $(-1, 0)$ 有一個孤立點），而代換 $t = \tan\theta$ 表明，切線映射其實是喬裝了的角度加倍。這就是為甚麼這些循環來自把圓分成九等份。Silverman 與 Tate 合著的 *Rational Points on Elliptic Curves*（《橢圓曲線上的有理點》）以本科程度把這個課題闡述得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。