詳細解答

# STEP III 2003，第 3 題

純數學 • 曲線描繪

> **STEP III 2003，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q3

## 關鍵思路

設 $u = (1+x)^m$ 及 $v = (1-x)^m$。於是 $\mathrm{f} = (u-v)/(u+v)$，而商法則（quotient rule）的結果會化簡得非常漂亮，因為 $u'v - uv'$ 有公因式 $(1-x^2)^{m-1}$。這個導數（derivative）永不為負，單憑這一點，我們幾乎已掌握 $y = \mathrm{f}(x)$ 的整個形狀。至於倒數（reciprocal）曲線，則藏着一種對稱（symmetry）：把 $x$ 換成 $1/x$，f 就變成 $1/\mathrm{f}$。

## 解答

### 分母永不為零

假設對某個實數 $x$ 有 $(1+x)^m + (1-x)^m = 0$。

若 $m$ 是偶數，兩項皆為非負，故兩項必須同時為零。這就需要同時有 $x = -1$ 和 $x = 1$，並不可能。

若 $m$ 是奇數，則 $(1+x)^m = -(1-x)^m = (x-1)^m$。當 $m$ 是奇數時，映射 $t \mapsto t^m$ 在 $\mathbb{R}$ 上嚴格遞增（strictly increasing），因此是一對一（one-to-one）的，於是 $1+x = x-1$，即 $1 = -1$。這是矛盾（contradiction）。

所以對每個實數 $x$ 都有 $(1+x)^m + (1-x)^m \neq 0$，而 f 在整個 $\mathbb{R}$ 上有定義並且可微（differentiable）。

**導數**

設 $u=(1+x)^m$ 及 $v=(1-x)^m$，則 $u'=m(1+x)^{m-1}$ 及 $v'=-m(1-x)^{m-1}$。根據商法則，

$$\mathrm{f}'(x)=\frac{(u'-v')(u+v)-(u-v)(u'+v')}{(u+v)^2}=\frac{2(u'v-uv')}{(u+v)^2}.$$

分子可以化簡：

$$\begin{aligned}u'v-uv' &= m(1+x)^{m-1}(1-x)^m+m(1+x)^m(1-x)^{m-1}\\ &= m(1+x)^{m-1}(1-x)^{m-1}[(1-x)+(1+x)]\\ &= 2m(1-x^2)^{m-1}.\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{f}'(x)=\frac{4m\,(1-x^2)^{m-1}}{[(1+x)^m+(1-x)^m]^2}.$$

**$m=5$ 的情況：曲線 $y=\mathrm{f}(x)$**

用二項式定理（binomial theorem）展開，分子中的偶次冪互相抵消，分母中的奇次冪互相抵消：

$$\mathrm{f}(x)=\frac{2(5x+10x^3+x^5)}{2(1+10x^2+5x^4)}=\frac{x(x^4+10x^2+5)}{5x^4+10x^2+1},\qquad \mathrm{f}'(x)=\frac{20(1-x^2)^4}{[(1+x)^5+(1-x)^5]^2}.$$

現在逐一讀出曲線的特徵。

- 對稱性。$\mathrm{f}(-x)=-\mathrm{f}(x)$，所以曲線繞原點有旋轉對稱（rotational symmetry）。曲線通過 $(0,0)$，該處的斜率（gradient）為 $\mathrm{f}'(0)=20/2^2=5$。
- 單調性（*monotonic*）。對所有 $x$ 都有 $\mathrm{f}'(x)\geq 0$，等號只在 $x=\pm1$ 時成立。所以 f 處處遞增。在 $x=\pm1$ 處曲線有駐點（stationary point），而由於 $(1-x^2)^4$ 不變號，這些駐點是拐點（point of inflection），而非轉向點（turning point）。它們位於 $(1,1)$ 和 $(-1,-1)$：$(1-x)^5$ 或 $(1+x)^5$ 一項變為零，餘下 $\mathrm{f}=\pm1$。
- $|x|$ 很大時。$\mathrm{f}(x)\approx x/5$。更準確地說，

  $$\mathrm{f}(x)-\frac{x}{5}=\frac{x(40x^2+24)}{5(5x^4+10x^2+1)},$$

  當 $|x|\to\infty$ 時，上式趨向 0。所以 $y=x/5$ 是斜漸近線（oblique asymptote）。曲線在 $x>0$ 時位於漸近線之上，在 $x<0$ 時位於漸近線之下。

**想一想** $\mathrm{f}(x)$ 的絕對值在哪裏大於 1，又在哪裏小於 1？

由於 f 遞增且 $\mathrm{f}(\pm1)=\pm1$，當 $|x|<1$ 時有 $|\mathrm{f}(x)|<1$，當 $|x|>1$ 時有 $|\mathrm{f}(x)|>1$。這一點對倒數曲線很重要。（當 $|x|<1$ 時，代入 $x=\tanh t$ 可得 $(1+x)/(1-x)=\mathrm{e}^{2t}$，再把 f 的分子和分母同除以 $(1-x)^5$，便得 $\mathrm{f}(\tanh t)=\tanh 5t$。這是理解曲線在 $-1$ 與 1 之間呈 S 形的另一個角度。）

**曲線 $y=1/\mathrm{f}(x)$**

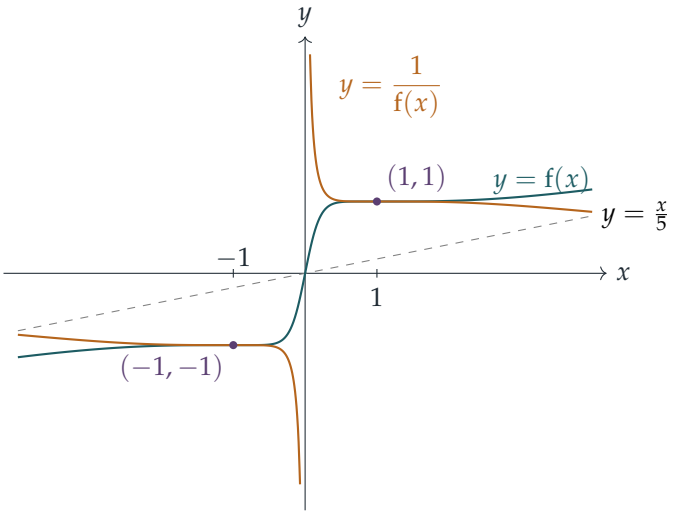
把 $x$ 換成 $1/x$，再把分子和分母同乘以 $x^5$，可得

$$\mathrm{f}(1/x)=\frac{(x+1)^5-(x-1)^5}{(x+1)^5+(x-1)^5}=\frac{(1+x)^5+(1-x)^5}{(1+x)^5-(1-x)^5}=\frac{1}{\mathrm{f}(x)},$$

當中用了 $(x-1)^5=-(1-x)^5$。所以 $y=1/\mathrm{f}(x)$ 就是曲線 $y=\mathrm{f}(1/x)$，它的特徵可由 f 的特徵推出：

- 它是奇函數（odd function），在 $x=0$ 處沒有定義，而這是 f 唯一的零點。在 0 附近，$1/\mathrm{f}(x)\approx1/(5x)$，所以 $y$ 軸是鉛垂漸近線（vertical asymptote），當 $x\to0^+$ 時 $y\to+\infty$，當 $x\to0^-$ 時 $y\to-\infty$。
- 它的導數是 $-\mathrm{f}'(x)/\mathrm{f}(x)^2\le0$，所以它在 $x>0$ 上遞減，在 $x<0$ 上亦遞減。它在 $(1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 有屬於駐點的拐點。
- 當 $|x|\to\infty$ 時，$1/\mathrm{f}(x)\approx5/x\to0$，所以 $x$ 軸是漸近線。曲線在 $x>0$ 時位於其上，在 $x<0$ 時位於其下。

兩條曲線只在 $\mathrm{f}(x)^2=1$ 之處相遇，即 $(1,1)$ 和 $(-1,-1)$。兩條曲線在該處都是水平的，所以它們是相切而非相交穿過。



## 驗算

- 取 $m = 1$：公式給出 $f'(x) = 4/2^2 = 1$，而事實上 $f(x) = 2x/2 = x$。
- 以數值計算，$f(1000)/1000 \approx 0.2000016$，與漸近線 $y = x/5$ 吻合。對 $m = 1, \ldots, 8$，在隨機選取的點上，以中心差分（central difference）求得的導數與 $f'$ 的公式一致。
- $f(\tanh t) = \tanh 5t$ 和 $f(1/x) = 1/f(x)$ 在隨機選取的點上均準確至 $10^{-9}$。

## 常見錯誤

- 把 $x = \pm 1$ 稱為極大點或極小點。導數在該處觸及零但不變號，所以這些是屬於駐點的拐點。
- 遺漏斜漸近線：f 是五次多項式除以四次多項式，所以它的增長有如 $x/5$，而不會趨於平緩。
- 把 $y = 1/f(x)$ 畫成在 $(\pm 1, \pm 1)$ 穿過 $y = f(x)$。兩條曲線在該處都是平的，所以它們只是相切。

## STEP 之外

代換 $x = \tanh t$ 顯示，f 正是以 $\tanh t$ 表示 $\tanh 5t$ 的公式，也就是 $\tan 5\theta$ 的倍角公式（multiple-angle formula）的雙曲（hyperbolic）版本。由此觀之，f 是一個有理映射（rational map），它共軛（conjugate）於乘以 5 的運算。這類映射，以及它們在迭代（iteration）下的表現，正是複動力系統（complex dynamics）的起點之一。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）是一本優美的書，可從中看到這類有理函數如何作用於整個複平面。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。