詳細解答

STEP III 2003，第 2 題

純數學 • 二項式級數

> **STEP III 2003，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q2

關鍵思路

中心二項式係數（central binomial coefficient）$\binom{2r}{r}$ 就藏在負半整數冪的二項級數（binomial series）之中。只要用開首的恆等式把 $(2r)!$ 拆成奇數因子和偶數因子，便會發現 $(1-p)^{-1/2}$ 中 p^r 的係數恰好是 $\binom{2r}{r}/4^r$。於是每個和其實都是喬裝了的二項級數，餘下的工作只是選取 p（以及在 (ii) 中選對冪次）。

解答

恆等式

把 $(2r)!$ 的因子分成奇數和偶數兩組：

$$(2r)! = [1 \times 3 \times \cdots \times (2r-1)] \times [2 \times 4 \times \cdots \times 2r].$$

r 個偶數因子各自是 $1, 2, \ldots, r$ 其中一個數的 2 倍，所以第二個括號等於 $2^r\, r!$。因此

$$\binom{2r}{r} = \frac{(2r)!}{r!\, r!} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2r-1) \times 2^r\, r!}{r!\, r!} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2r-1)}{r!} \times 2^r,$$

這正是所要證明的結果。

第 (i) 部分

當 $|p|<1$ 時，由二項級數可得

$$\begin{aligned}(1-p)^{-\frac{1}{2}} &= 1+\left(-\tfrac{1}{2}\right)(-p)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-p)^2\\ &\quad+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-p)^3+\cdots\\ &= 1+\tfrac{1}{2}p+\tfrac{3}{8}p^2+\tfrac{5}{16}p^3+\cdots.\end{aligned}$$

通項也依循同樣的規律。在 p^r 的係數中，因子 $-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\ldots$ 帶來 r 個負號，$(-p)^r$ 又帶來 r 個，兩者互相抵消，剩下

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{2r-1}{2}}{r!}\,p^r=\frac{1\times3\times\cdots\times(2r-1)}{2^r\,r!}\,p^r.$$

想一想 這與 $\binom{2r}{r}$ 有甚麼關係？

由恆等式可知 $\dfrac{1\times3\times\cdots\times(2r-1)}{r!}=\dfrac{\binom{2r}{r}}{2^r}$。所以 p^r 的係數是 $\binom{2r}{r}/4^r$；當 $r=0$ 時這也成立，因為兩邊都等於 1。因此

$$(1-p)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{2r}{r}\left(\frac{p}{4}\right)^r\qquad(|p|<1).$$

我們要求的和中 $(p/4)^r=1/8^r$，所以取 $p=\frac{1}{2}$，這個值在收斂區間（interval of convergence）之內。於是

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\binom{2r}{r}}{8^r}=\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}.$$

第 (ii) 部分

多出來的因子 $2r+1$ 提示我們把冪次再推前一步，考慮 $(1-p)^{-3/2}$。當 $|p|<1$ 時，其二項級數中 p^r 的係數是（正負號如前一樣互相抵消）

$$\begin{aligned}\frac{\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\cdots\times\frac{2r+1}{2}}{r!} &= \frac{3\times5\times\cdots\times(2r+1)}{2^r\,r!}\\ &= (2r+1)\,\frac{1\times3\times\cdots\times(2r-1)}{2^r\,r!}=\frac{(2r+1)\binom{2r}{r}}{4^r},\end{aligned}$$

這是因為 $3\times5\times\cdots\times(2r+1)=(2r+1)\times[1\times3\times\cdots\times(2r-1)]$，然後再像 (i) 那樣運用恆等式。（當 $r=0$ 時，首尾兩端都等於 1。）所以

$$(1-p)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)\binom{2r}{r}\left(\frac{p}{4}\right)^r\qquad(|p|<1).$$

現在需要 $p/4 = \frac{1}{5}$，即 $p = \frac{4}{5}$，同樣滿足 $|p| < 1$。因此

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2r+1)\binom{2r}{r}}{5^r} = \left(1 - \tfrac{4}{5}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\tfrac{1}{5}\right)^{-\frac{3}{2}} = 5^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{5})^3,$$

這正是所要證明的結果。

另一做法：當 $|x| < \frac{1}{4}$ 時，記 $f(x) = \sum \binom{2r}{r} x^r = (1-4x)^{-1/2}$。在收斂區間內對冪級數（power series）逐項求導，得 $\sum r\binom{2r}{r}x^r = xf'(x) = 2x(1-4x)^{-3/2}$，所以

$$\sum (2r+1)\binom{2r}{r}x^r = 4x(1-4x)^{-\frac{3}{2}} + (1-4x)^{-\frac{1}{2}} = (1-4x)^{-\frac{3}{2}},$$

代入 $x = \frac{1}{5}$ 便得到相同的答案。

驗算

- (i) 的首幾項是 $1 + \frac{2}{8} + \frac{6}{64} + \frac{20}{512} \approx 1.371$，已經接近 $\sqrt{2} \approx 1.414$；把 200 項加起來得 $1.41421356\ldots$。
- (ii) 的級數收斂得較慢（相鄰項之比趨向 $\frac{4}{5}$），但 400 項之和是 $11.18033988\ldots$，與 $5\sqrt{5} \approx 11.1803$ 吻合。
- 當 $r = 0, 1, 2, 3$ 時，係數 $\binom{2r}{r}/4^r$ 分別是 $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}$，與直接求得的四項一致。

常見錯誤

- 弄錯正負號：係數中的 r 個負因子與 $(-p)^r$ 所帶來的 $(-1)^r$ 必定互相抵消，所以每個係數都是正數。
- 忘記檢查所選的 p 是否滿足 $|p| < 1$；若不滿足，級數未必收斂至該函數。
- 在 (ii) 中換一個 p 再用 $(1-p)^{-1/2}$：單憑這個級數，不可能得出因子 $2r+1$。

STEP 之外

函數 $\sum \binom{2r}{r} x^r = (1-4x)^{-1/2}$ 是中心二項式係數的生成函數（generating function），是組合數學（combinatorics）中的標準工具；例如把它平方便得 $\sum_r 4^r x^r$，從而證明 $\sum_k \binom{2k}{k}\binom{2r-2k}{r-k} = 4^r$。逐項求導為何成立，以及冪級數確切在哪裏收斂，都是大學一年級分析學（analysis）的課題。關於冪級數，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*；想做更多與級數有關的 STEP 練習，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。