詳細解答

STEP III 2003，第 14 題

概率與統計 • 概率生成函數

> **STEP III 2003，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q14

關鍵思路

獨立得分之和的概率生成函數（probability generating function，簡稱 pgf），等於各個得分的 pgf 的乘積。因此，「哪些骰子會給出相同的總點數分佈」這個問題，就變成「一個多項式可以怎樣分拆成兩個因式」的問題。把所有式子分解成不可約（irreducible）的因式，再把這些因式分配給兩顆骰子，便可以讀出所有可能的重新標號方式。

解答

第一部分

設 X 為一顆標準公平骰子的得分。$1,\ldots,6$ 每個點數的概率都是 $\frac{1}{6}$，所以

$$G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \tfrac{1}{6}(t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6) = \tfrac{1}{6}\,t\,(1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5).$$

要把括號內的式子因式分解，先把各項兩兩配對，然後再配成平方差：

$$1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 = (1 + t) + t^2(1 + t) + t^4(1 + t) = (1 + t)(1 + t^2 + t^4),$$
$$1 + t^2 + t^4 = (1 + t^2)^2 - t^2 = (1 + t + t^2)(1 - t + t^2).$$

因此

$$G_X(t) = \tfrac{1}{6}\,t\,(1 + t)(1 - t + t^2)(1 + t + t^2).$$

若 X_1 和 X_2 是獨立擲出的兩顆骰子的得分，則 t^{X_1} 和 t^{X_2} 互相獨立（independent），所以 $\mathrm{E}(t^{X_1+X_2}) = \mathrm{E}(t^{X_1})\mathrm{E}(t^{X_2})$，而且

$$G_{X_1+X_2}(t) = G_X(t)^2 = \frac{1}{36}\,t^2(1 + t)^2(1 - t + t^2)^2(1 + t + t^2)^2,$$

這正是題目要求的形式。

第二部分

設 Y 和 Z 分別為標號是 $1,2,2,3,3,4$ 和 $1,3,4,5,6,8$ 的兩顆骰子的得分。數一數各面的點數，得

$$G_Y(t) = \tfrac{1}{6}(t + 2t^2 + 2t^3 + t^4),$$
$$G_Z(t) = \tfrac{1}{6}(t + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^8).$$

對於 Y：$1 + 2t + 2t^2 + t^3 = (1 + t)(1 + t + t^2)$，把右邊展開即可驗證。所以

$$G_Y(t) = \tfrac{1}{6}\, t\,(1 + t)(1 + t + t^2).$$

對於 Z，第一部分中有用的乘積是 $(1+t)(1-t+t^2) = 1+t^3$ 和 $(1+t+t^2)(1-t+t^2) = 1 + t^2 + t^4$。於是

$$(1 + t^3)(1 + t^2 + t^4) = 1 + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^7,$$

再乘以 t，剛好得到 $t + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^8$。因此

$$G_Z(t) = \tfrac{1}{6}\, t\,(1 + t)(1 + t + t^2)(1 - t + t^2)^2.$$

兩顆骰子獨立擲出，故

$$G_{Y+Z}(t) = G_Y(t)G_Z(t) = \frac{1}{36}\, t^2(1 + t)^2(1 - t + t^2)^2(1 + t + t^2)^2 = G_{X_1+X_2}(t).$$

兩個 pgf 若作為多項式相等，它們的係數便一一相等，而 t^n 的係數就是總點數為 n 的概率。所以用這兩顆骰子擲出每個總點數的概率，都與用兩顆標準骰子時相同。

最後部分

一顆標準四面骰子的 pgf 是

$$\tfrac{1}{4}(t + t^2 + t^3 + t^4) = \tfrac{1}{4}\, t\,(1 + t)(1 + t^2),$$

所以兩顆這樣的骰子的總點數，其目標 pgf 是

$$\frac{1}{16}\, t^2(1 + t)^2(1 + t^2)^2.$$

假設兩顆新骰子的 pgf 分別是 $\frac{1}{4}f(t)$ 和 $\frac{1}{4}g(t)$。f 中 t^n 的係數是標號為 n 的面的數目，所以 f 和 g 都是係數為非負整數的多項式，並且 $f(1) = g(1) = 4$。由於每個標號都是正整數，所以 $f(0) = g(0) = 0$。我們需要

$$f(t)\, g(t) = t^2(1 + t)^2(1 + t^2)^2.$$

想一想 為甚麼 f 必定只由 t、$1+t$、$1+t^2$ 這幾個因式組成，而不會有其他因式？

因式 t 和 $1+t$ 是一次式，而 $1+t^2$ 沒有實根，所以三者在實數範圍內都是不可約的。多項式分解成不可約因式的方法是唯一的（不計常數倍），所以右邊的任何因式都必定是

$$f(t) = c\,t^k(1+t)^a(1+t^2)^b, \qquad g(t) = \tfrac{1}{c}\,t^{2-k}(1+t)^{2-a}(1+t^2)^{2-b},$$

其中 $0 \le k, a, b \le 2$，而常數 $c > 0$。

現在逐一運用 f 和 g 須符合的條件。

- *常數 c。* f 的最低次項係數是 c，而 g 的是 $1/c$。兩者都是面的數目，所以都是正整數，由此必有 $c = 1$。
- *t 的冪次。* $f(0) = 0$ 需要 $k \ge 1$，而 $g(0) = 0$ 需要 $2 - k \ge 1$。所以 $k = 1$：每顆骰子恰好有一個因式 t。
- *四個面。* 由 $f(1) = 2^a \cdot 2^b = 4$ 得 $a + b = 2$，這時 $g(1) = 2^{2-a}2^{2-b} = 4$ 自動成立。

所以 (a, b) 是 $(2,0)$、$(1,1)$ 或 $(0,2)$，而 g 則取與之互補的選擇。由於把兩顆骰子對調會得出同一對骰子，所以只有兩種情況。

- 兩者皆為 $(a,b) = (1,1)$：$f = g = t(1+t)(1+t^2) = t + t^2 + t^3 + t^4$，即標準的一對 $1,2,3,4$ 和 $1,2,3,4$。
- $(a,b) = (2,0)$ 和 $(0,2)$：

  $$f(t) = t(1+t)^2 = t + 2t^2 + t^3, \qquad g(t) = t(1+t^2)^2 = t + 2t^3 + t^5,$$

  即標號為 $1,2,2,3$ 和 $1,3,3,5$ 的兩顆骰子。

在每種情況中，兩個多項式的係數都是非負整數，而且總和為 4，所以兩者確實都是骰子；而按照構造方法，它們會給出正確的 pgf。

因此，僅有的標號方式就是標準的一對，以及 $\{1,2,2,3\}$、$\{1,3,3,5\}$ 這一對。

驗算

對於那對非標準的四面骰子，把總點數逐一列出：16 個等可能的和是 2, 4, 4, 6, 3, 5, 5, 7, 3, 5, 5, 7, 4, 6, 6, 8，得出總點數 $2, \ldots, 8$ 的頻數為 $1, 2, 3, 4, 3, 2, 1$，與兩顆標準骰子完全相同。把 $t = 1$ 代入上面任何一個 pgf 都會得到 1，這是檢查每個因式分解的快捷方法。用電腦搜尋所有標號由 1 至 7 的四面骰子對，找到的恰好就是上述兩對；而 $1,2,2,3,3,4$ 和 $1,3,4,5,6,8$ 這兩顆骰子的總點數，亦與標準分佈完全吻合（例如兩種情況下都有 $\mathrm{P}(\text{總點數} = 7) = \frac{6}{36}$）。

常見錯誤

- 忘記了常數 c：你需要說明為甚麼不可以一顆骰子帶有因子 2，而另一顆帶有因子 $\frac{1}{2}$。理由就是兩顆骰子的最低次項係數都必須是正整數。
- 容許 $k = 0$ 或 $k = 2$。這樣其中一顆骰子便會有一面標號為 0，而這並不是正整數。
- 把 $(1 - t + t^2)$ 分解成複數一次因式。在實數範圍內它是不可約的，而這正是分配因式時所需要的形式。

STEP 之外

這裏的一對六面骰子稱為 *Sicherman* 骰子（Sicherman dice），用同樣的方法可以證明，它們是唯一一對標號為正整數的非標準六面骰子。這個論證建基於多項式的唯一分解（unique factorisation）；你會在大學第一個環與域（rings and fields）的課程中遇到它，它是算術基本定理（fundamental theorem of arithmetic）的多項式版本。生成函數亦能把許多困難的計數問題化為代數問題。關於這兩個課題，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣），以及 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。