詳細解答

STEP III 2003，第 13 題

概率與統計 • 吸收馬可夫鏈

STEP III 2003，第 13 題

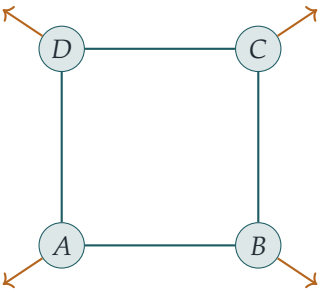
繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/03-s3-q13

關鍵思路

這是一種「首步分析」(first-step analysis)：以兔子下一步的行動作為條件，把從某個洞室出發的概率，用牠能到達的各個洞室出發的概率來表示。這樣便得到四條線性方程，而正方形的對稱性（對對角線 AC 作反射，B 與 D 互換）可以減省工夫。最後一部分，我們把同一技巧用於一個修改過的兔穴，當中進入 C 即算作失敗，然後應用條件概率 (conditional probability) 的定義。

解答



通往地面的隧道

在整個解答中，每一步都以概率 $\frac{1}{3}$ 選出，並且與兔子過去的行蹤獨立（對於一隻「發現自己身處」某個洞室的兔子，我們就是這樣理解「可能性均等」的）。以 E_A 表示兔子最終經由 A 的隧道離開這一事件 (event)。

第 (i) 部分

假設兔子身處 A，並以牠的下一步作為條件。

- 牠有 $\frac{1}{3}$ 的概率立即從 A 的隧道往上走，此時 E_A 已經發生。
- 牠有 $\frac{1}{3}$ 的概率跑到 B。這時牠身處 B，而由於牠往後的行動與牠如何到達該處無關，牠最終從 A 離開的概率是 p_B。
- 牠有 $\frac{1}{3}$ 的概率跑到 D，同理，此時的概率是 p_D。

根據全概率公式（law of total probability），

$$p_A = \tfrac{1}{3}\cdot 1 + \tfrac{1}{3}p_B + \tfrac{1}{3}p_D,$$

正如所求。

第 (ii) 部分

從其餘洞室出發，用同樣的論證可再得三條方程。唯一的分別是：經由 B、C 或 D 的隧道離開，即表示 E_A *不發生*，所以該分支的貢獻是 $\frac{1}{3}\cdot 0$：

$$\begin{aligned} p_B &= \tfrac{1}{3}p_A + \tfrac{1}{3}p_C, \\ p_C &= \tfrac{1}{3}p_B + \tfrac{1}{3}p_D, \\ p_D &= \tfrac{1}{3}p_A + \tfrac{1}{3}p_C. \end{aligned}$$

p_B 與 p_D 的方程右邊相同，所以 $p_B = p_D$；把這個共同的值記作 b。（這就是對 AC 的反射對稱。）於是

$$p_A = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}b, \qquad p_C = \tfrac{2}{3}b,$$

代入 p_B 的方程，得

$$b = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}b + \tfrac{2}{3}b\right) = \tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9}b \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{5}{9}b = \tfrac{1}{9} \quad\Longrightarrow\quad b = \tfrac{1}{5}.$$

因此

$$p_A = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{15} = \frac{7}{15}, \qquad \text{並且} \qquad p_B = p_D = \tfrac{1}{5},\ p_C = \tfrac{2}{15}.$$

想一想 我們怎樣知道兔子一定會離開，從而確定這些方程真的能把各個概率定下來？

每一步兔子都有 $\frac{1}{3}$ 的概率離開，所以經過 n 步後牠仍在地底的機會是 $(\frac{2}{3})^n \to 0$：牠以概率 1 離開。此外，這四條線性方程只有一個解（我們解方程時並無任何選擇餘地），所以上面的數值就是所求的概率。

第 (iii) 部分

設 N 為兔子從未到過 C 這一事件。我們要求的是

$$\mathrm{P}(N \mid E_A) = \frac{\mathrm{P}(N \cap E_A)}{\mathrm{P}(E_A)},$$

其中兔子由 A 出發，所以分母是 $p_A = \frac{7}{15}$。

至於分子，設 q_A、q_B、q_D 分別為兔子現時身處 A、B、D（且至今未到過 C）的條件下，*從未進入 C* 而經由 A 的隧道離開的概率。首步分析的做法與之前完全一樣，只是現在走進 C 也算作失敗：

$$q_A = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}q_B + \tfrac{1}{3}q_D,$$
$$q_B = \tfrac{1}{3}q_A + \tfrac{1}{3}\cdot 0 + \tfrac{1}{3}\cdot 0,$$

因為兔子從 B 出發，要麼跑回 A，要麼跑進 C（失敗），要麼經由錯的隧道離開（失敗）。根據對稱性，$q_D = q_B = \frac{1}{3}q_A$，所以

$$q_A = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{9}q_A \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{7}{9}q_A = \tfrac{1}{3} \quad\Longrightarrow\quad q_A = \tfrac{3}{7}.$$

因此

$$\mathrm{P}(N \mid E_A) = \frac{3/7}{7/15} = \frac{45}{49}.$$

驗算

- p_A, p_B, p_C, p_D 這四個值是從各個洞室出發而由 A 離開的概率。根據對稱性，它們也分別是從 A 出發而由 A、B、C、D 離開的概率，所以它們的和必須是 1：果然 $\frac{7}{15} + \frac{3}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} = 1$。
- $p_A > p_B = p_D > p_C$，這合乎預期：兔子的起點離 A 越遠，從那裏離開的可能性就越低。
- (iii) 的答案接近 1：從 A 離開的兔子，通常只走了很短的路程便離開。模擬 4×10^5 隻兔子，得出 p_A 為 0.469，條件概率為 0.918，而理論值是 $\frac{7}{15} \approx 0.467$ 和 $\frac{45}{49} \approx 0.918$。

常見錯誤

- 在 p_B、p_C、p_D 的方程中也加入「立即離開」的 $\frac{1}{3}$ 一項：經由 A 以外任何一條隧道離開，貢獻都是 0。
- 以 $q_A = \frac{3}{7}$ 作為 (iii) 的答案。那是 $\mathrm{P}(N \cap E_A)$；題目問的是條件概率，所以我們還要除以 p_A。

STEP 之外

兔子的行動構成一條馬可夫鏈（Markov chain）：牠的下一步只取決於牠現時身處何處。地面是一個吸收態（absorbing state），而 p_A, p_B, p_C, p_D 是吸收概率（absorption probabilities），首步分析總能把它們化為一個線性方程組。同一想法還可以求出被吸收前的期望時間（expected time）、賭徒破產（gambler's ruin）概率等等。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率入門）對馬可夫鏈有很好的初步介紹。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。