詳細解答

STEP III 2003，第 11 題

力學 • 攔截運動學

> **STEP III 2003，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q11

關鍵思路

暫且放下運動過程，只考慮碰撞會發生的那一點。在那一刻，A、B 與碰撞點構成一個三角形，三邊分別是 d、P 走過的距離和 Q 走過的距離，而 B 處的角由方位角（bearing）決定。於是餘弦定理（cosine rule）給出一條方程，再把兩段走過的距離都用時間表示，便得到一條二次方程（quadratic）。能否發生碰撞，就變成這條二次方程有沒有正根（positive root）的問題。

解答

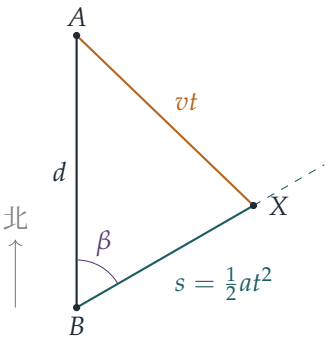
我們把 P 和 Q 視為在水平面上運動的質點（particle）。方位角由正北起順時針量度，且 $v > 0$。

碰撞方程

假設 Q 在時間 $t > 0$ 於點 X 擊中 P。到那時，P 已由靜止出發，以恆定加速度 a 沿一條固定直線運動，所以

$$BX = s = \tfrac{1}{2}at^2,$$

而 Q 以恆定速率沿直線運動，所以 $AX = vt$。



由 B 到 A 的方向是正北，而由 B 到 X 的方向的方位角為 β，所以角 ABX 等於 β（若 $\beta > 180°$，則為 $360° - \beta$，兩者的餘弦相同）。在三角形 ABX 中應用餘弦定理，得

$$v^2t^2 = d^2 + s^2 - 2ds\cos\beta.$$

（若 $\beta = 0$ 或 $180°$，這個「三角形」會退化成一條線段，但方程依然成立：它變成 $(vt)^2 = (d \mp s)^2$。）由於 $t^2 = 2s/a$，左邊等於 $2v^2s/a$，整理後得

$$s^2 - 2\Big(d\cos\beta + \frac{v^2}{a}\Big)s + d^2 = 0. \qquad (*)$$

反過來，若 $(*)$ 有一個根 $s > 0$，設 $t = \sqrt{2s/a}$，並設 X 為 P 在該時刻的位置。那麼 $(*)$ 所說的正是 $AX = vt$，而且 $AX > 0$。因此，若把 Q 由 A 朝着 X 射出，它會在時間 t 到達 X，與 P 同時到達，並擊中它。故此

$$\text{存在合適的方向} \iff (*)\text{ 有正根}s.$$

必要條件（necessary condition）

設 $k = d\cos\beta + v^2/a$，則 $(*)$ 就是 $s^2 - 2ks + d^2 = 0$。

> **想一想** 這條二次方程當然需要有實根，但這樣就足夠了嗎？關於這些根，我們還要知道甚麼？

這些根還必須是正數，因為 s 是走過的距離。兩根之積是 $d^2 > 0$，所以兩根同號，而兩根之和是 $2k$。因此，方程有正根，當且僅當判別式（discriminant）非負且 $k > 0$：

$$k^2 \geq d^2 \quad \text{且} \quad k > 0 \iff k \geq d.$$

（若 $k > 0$，則 $k^2 \geq d^2$ 等同於 $k \geq d$，因為 $d > 0$；而 $k \geq d$ 必然導致 $k > 0$。）

所以，若 Q 能擊中 P，則

$$d\cos\beta + \frac{v^2}{a} \geq d, \qquad \text{即} \qquad v^2 \geq ad(1 - \cos\beta),$$

這正是所要求的結果。

在 P 移動距離 d 之前擊中

現在假設 $v^2 > ad(1-\cos\beta)$，於是 $k > d > 0$。這時判別式 $4(k^2-d^2)$ 嚴格為正，$(*)$ 有兩個相異的根 $s_1 < s_2$。兩根皆為正數，因為兩根之和 $2k$ 與兩根之積 d^2 都是正數。由於兩根相異，且

$$s_1 s_2 = d^2,$$

它們不可能同時不小於 d，也不可能同時不大於 d，所以

$$s_1 < d < s_2.$$

明確地寫出來，$s_1 = k - \sqrt{k^2-d^2}$。

根據上文的逆向論證（converse），把 Q 朝着點 X_1 射出，其中該點與 B 相距 s_1 並位於 P 的路徑上，則 Q 會在時間 $t_1 = \sqrt{2s_1/a}$ 擊中 P，而在那一刻 P 只移動了 $s_1 < d$。所以 Q 可以瞄準某個方向，在 P 移動距離 d 之前擊中 P，這就是所要證明的。

驗算

- 取 $\beta = 0$：P 筆直地朝 A 走去，所以無論 v 的值是多少，兩者必定相遇。條件給出 $v^2 \geq 0$，這恆成立。這時 $(*)$ 變成 $s^2 - 2(d+v^2/a)s + d^2 = 0$，而較小的根小於 d：兩者在 P 到達 A 之前相遇，與常理相符。
- 取 $a = d = 1$、$\beta = 90^\circ$（即 P 向正東走），以及 $v^2 = 2 > 1 = ad(1-\cos\beta)$。這時 $(*)$ 是 $s^2 - 4s + 1 = 0$，所以 $s_1 = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268 < 1$。在 $t_1 = \sqrt{2s_1}$ 時，我們有 $s_1^2 + 1 = 2t_1^2$，所以碰撞點與 A 的距離確實是 vt_1。我們又對 a、d、β 和 v 的大量隨機取值作了數值檢驗，既確認了在 $s_1 < d$ 處擊中，也確認了當 $v^2 < ad(1-\cos\beta)$ 時，P 與 A 的距離始終大於 vt。
- 在臨界情況 $v^2 = ad(1-\cos\beta)$ 下，我們得到 $k = d$ 和重根（double root）$s = d$：唯一可能的擊中時刻，恰好是 P 走了 d 的時候，這就是最後一部分需要嚴格不等式的原因。

常見錯誤

- 只要求判別式非負。這樣得到的是 $|k| \geq d$，它同時容許 $k \leq -d$，而這時兩根皆為負數，不會發生碰撞。
- 在餘弦定理中用錯了角。B 處的角是 BA（正北）與 BX（方位角 β）之間的夾角，所以它就是 β 本身，而不是 $180^\circ - \beta$。
- 在最後一部分只證明了必要條件。你還必須證明朝着 X_1 瞄準確實可行，這正是那個逆向論證。

STEP 之外

這是一道追蹤與攔截問題。這裏目標的路徑是預先知道的，而攔截者沿直線運動，所以問題歸結為一條關於相遇時間的方程。導彈制導和「追逐曲線」(pursuit curves) 則不同：追逐者不斷轉向目標，結果引出的是微分方程（differential equations）。先定下相遇點，再問誰能及時趕到，這種習慣是大學一年級力學的標準工具。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）對相對運動的運動學（kinematics）有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。