詳細解答

STEP III 2003，第 10 題

力學 • 變加速度

> **STEP III 2003，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q10

關鍵思路

加速度 $kx\dot{x}$ 是一個對時間的恰當導數（exact derivative）：它就是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}kx^2)$。因此我們可以立即積分一次，得到一階方程（first-order equation）$\dot{x} = \frac{1}{2}kx^2 + C$，而這個方程可以分離變量。常數 C 的正負決定一切：常數為正時得到反正切（arctangent）（解會爆破），常數為負時得到部分分式（partial fractions）和對數（解會穩定下來）。

解答

我們把質點看成在 x 軸上運動，並且 $\ddot{x} = kx\dot{x}$。由於 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2) = 2x\dot{x}$，運動方程為

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\tfrac{1}{2}kx^2\Big), \qquad \text{所以} \qquad \dot{x} = \tfrac{1}{2}kx^2 + C$$

其中 C 為常數。當 $t = 0$ 時，$x = d$ 且 $\dot{x} = U$，所以 $C = U - \frac{1}{2}kd^2$，於是

$$\dot{x} = \tfrac{1}{2}k(x^2 - d^2) + U. \tag{$*$}$$

第 (i) 部分

當 $U = kd^2$ 時，方程 $(*)$ 變成

$$\dot{x} = \tfrac{1}{2}k(x^2 + d^2).$$

右邊恆為正，所以我們可以分離變量（separate variables）：

$$\int_d^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + d^2} = \int_0^t \tfrac{1}{2}k\,\mathrm{d}s \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{d}\Big[\arctan\frac{x}{d} - \arctan 1\Big] = \tfrac{1}{2}kt.$$

由於 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$，由此得 $\arctan(x/d) = \frac{1}{2}dkt + \frac{\pi}{4}$，所以

$$x = d\tan\Big(\frac{dkt}{2} + \frac{\pi}{4}\Big).$$

只要 tan 的輻角保持小於 $\frac{\pi}{2}$，這個式子就成立（反正切的取值範圍是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$）。當 t 由 0 開始增加時，輻角由 $\frac{\pi}{4}$ 開始增加，並在以下時刻達到 $\frac{\pi}{2}$：

$$\frac{dkt}{2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{即} \qquad t = \frac{\pi}{2dk}.$$

由於 $\tan\theta \to +\infty$ 當 $\theta \to \frac{\pi}{2}$ 從下方趨近時成立，而且 $d > 0$，所以當 $t \to \frac{\pi}{2dk}$ 時，$x \to \infty$，這正是所要證明的。質點在有限時間內到達無窮遠。

第 (ii) 部分

現在 $U < 0$，所以 $C = U - \frac{1}{2}kd^2 < 0$。設 $C = -\frac{1}{2}ka^2$，其中 $a > 0$，即

$$a = \sqrt{d^2 - \frac{2U}{k}}, \qquad \text{使得} \qquad \dot{x} = \tfrac{1}{2}k(x^2 - a^2).$$

因為 $U < 0$ 且 $k > 0$，所以 $a > d > 0$。

> **想一想** 部分分式所得的對數，應該用哪一個：$\ln\frac{x-a}{x+a}$ 還是 $\ln\frac{a-x}{a+x}$？

這取決於 x 落在哪個範圍。常數解 $x = \pm a$ 正是 $\dot{x} = 0$ 之處。起初 $x = d$ 嚴格地位於 $-a$ 與 a 之間，而由該處出發的解不可能越過常數解 $x = \pm a$（這類一階方程的兩個解不可能相遇），所以在任何時刻都有 $-a < x < a$。在這個範圍內 $\dot{x} < 0$，所以 x 遞減，而 $a - x$ 和 $a + x$ 這兩個量皆為正。

利用 $\dfrac{1}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x+a}\right)$ 並分離變量，

$$\frac{1}{2a}\left[\ln\frac{a-u}{a+u}\right]_d^x = \tfrac{1}{2}kt \quad \Longrightarrow \quad \frac{a-x}{a+x} = A\,\mathrm{e}^{akt}, \qquad \text{其中} A = \frac{a-d}{a+d}.$$

注意 $0 < A < 1$，因為 $a > d > 0$。解出 x，

$$x = a\,\frac{1 - A\mathrm{e}^{akt}}{1 + A\mathrm{e}^{akt}}, \qquad a = \sqrt{d^2 - \frac{2U}{k}}, \quad A = \frac{a-d}{a+d}.$$

這個式子對所有 $t \geq 0$ 都有定義（分母為正）。等價地，由於 $\ln A = -2\,\mathrm{artanh}(d/a)$，它可以寫成 $x = a\tanh(\mathrm{artanh}(d/a) - \frac{1}{2}akt)$。

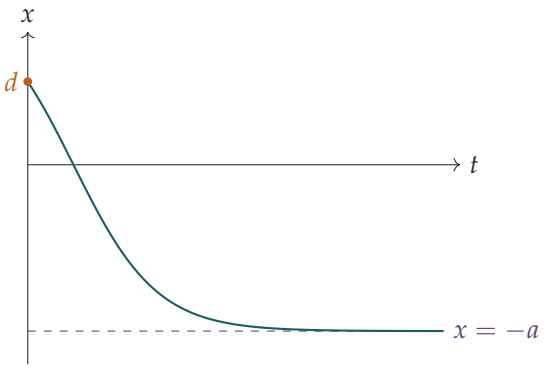
當 $t \to \infty$ 時，$A\mathrm{e}^{akt} \to \infty$，因為 $A > 0$ 且 $ak > 0$。把分子和分母同時除以 $A\mathrm{e}^{akt}$，

$$x = a\,\frac{A^{-1}\mathrm{e}^{-akt} - 1}{A^{-1}\mathrm{e}^{-akt} + 1} \longrightarrow -a.$$

所以 x 趨向極限（limit）

$$-a = -\sqrt{d^2 - \frac{2U}{k}}.$$

（這個極限也與 k 有關；它不能只用 d 和 U 來表示，因為固定 d 和 U 而改變 k，極限也會隨之改變。）



圖像（以 $d=1$、$a=2$、$k=1$ 繪畫）顯示質點由 d 出發，初速度為負，經過原點後越來越慢地趨近 $-a$。

驗算

- 在第 (i) 部分，$t=0$ 給出 $x=d\tan\frac{\pi}{4}=d$，而求導得 $\dot{x}=\frac{1}{2}kd^2\sec^2\frac{\pi}{4}=kd^2=U$。
- 在第 (ii) 部分，$t=0$ 給出 $x=a\frac{1-A}{1+A}=d$。當 $U\to 0^-$ 時，$a\to d$ 且 $A\to 0$，所以 x 一直停留在 d：這是正確的，因為 $x=d$、$\dot{x}=0$ 會令加速度為零。
- 數值上，以龍格－庫塔法（Runge–Kutta method）對隨機選取的 k、d 和 U 逐步求解 $\ddot{x}=kx\dot{x}$，結果與兩條公式吻合，誤差小於 10^{-6}。例如，取 $k=1$、$d=1$、$U=-1.5$ 時有 $a=2$，而數值計算所得的 x 穩定於 -2.000000。

常見錯誤

- 使用 $\ln\frac{x-a}{x+a}$ 而不加絕對值：當 $|x|<a$ 時，這是負數的對數。
- 求極限時取了正平方根：x 由 d 開始遞減，所以極限是 $-a$，而不是 $+a$。
- 把加速度寫成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，得到 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=kxv$，然後除以 v 而沒有指出 $v\neq 0$。這在本題行得通，但直接對 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 積分便可避開這個問題。

STEP 之外

第 (i) 部分是有限時間爆破（finite-time blow-up）的一個小例子：對於方程 $\dot{x}=f(x)$，若 f 的增長快於線性（這裏是二次增長），解便可能在有限時間內趨向無窮，所以解不一定對所有 t 都存在。第 (ii) 部分展示了另一種情況：常數解 $x=\pm a$ 是平衡點（equilibria），$-a$ 是穩定的而 $+a$ 是不穩定的，而且相線（phase line）圖在未作任何積分之前已能預

測極限。這兩個概念，連同阻止解互相穿越的唯一性定理（uniqueness theorem），在 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程入門教科書）中都有論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。