詳細解答

STEP III 2003，第 1 題

純數學 • 反雙曲函數積分法

STEP III 2003，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/03-s3-q1

關鍵思路

頭兩個結果是細心運用鏈式法則（chain rule）的計算。它們真正有用之處，是提供了一個範本：每個反函數（inverse function）的導數（derivative）都具有 $\dfrac{\text{常數}}{(\text{一次式})\sqrt{\text{一次式}}}$ 的形式，而這正正是兩個被積函數（integrand）的形式。因此，對每個積分，我們選取 a 和 b 去配合這個範本。根號外的括號告訴我們該用哪一條公式。若它是 $x+b$，即常數較大的那個，便用 arcsin；若它是 $x+a$，即常數較小的那個，便用 arcosh。

解答

兩個導數

設 $y = \dfrac{x+a}{x+b}$。由商法則（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(x+b)-(x+a)}{(x+b)^2} = \frac{b-a}{(x+b)^2}.$$

由於 $x+a>0$ 及 $x+b>0$，可知 $y>0$；又由於 $b>a$，分子小於分母，所以 $0<y<1$，而 $\arcsin y$ 在該處可微（differentiable）。接着，

$$1-y^2 = \frac{(x+b)^2-(x+a)^2}{(x+b)^2} = \frac{(b-a)(2x+a+b)}{(x+b)^2},$$

這裏用了平方差（difference of two squares）公式。由於 $x+b>0$，$(x+b)^2$ 的平方根就是 $x+b$ 本身，所以

$$\sqrt{1-y^2} = \frac{\sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}}{x+b}.$$

由鏈式法則，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin\left(\frac{x+a}{x+b}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+b}{\sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}}\cdot\frac{b-a}{(x+b)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{b-a}}{(x+b)\sqrt{a+b+2x}},$$

因為 $(b-a)/\sqrt{b-a} = \sqrt{b-a}$。這就是所求的結果。

至於 arcosh，設 $z = \dfrac{x+b}{x+a}$。這裏 $z > 1$，因為 $x+b > x+a > 0$。於是

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)^2} = -\frac{b-a}{(x+a)^2}, \qquad z^2-1 = \frac{(b-a)(2x+a+b)}{(x+a)^2}.$$

由於 $x+a>0$，$\sqrt{z^2-1} = \sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}\,/(x+a)$，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh}\left(\frac{x+b}{x+a}\right) = \frac{x+a}{\sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}}\cdot\left(-\frac{b-a}{(x+a)^2}\right) = -\frac{\sqrt{b-a}}{(x+a)\sqrt{a+b+2x}}.$$

兩個結果看來幾乎一樣。分別只在於正負號，以及根號外是哪一個括號。

想一想 arcsin 的計算實際上用到了哪些假設？

我們需要 $x+b>0$ 來化簡 $\sqrt{(x+b)^2}$，也需要 $1-y^2>0$。從因式分解後的形式可見，在 $b>a$ 的前提下，$1-y^2>0$ 恰好在 $a+b+2x>0$ 時成立。我們從沒有用過 $x+a>0$ 本身。所以，只要 $x+b>0$ 及 $a+b+2x>0$，arcsin 的公式便成立，即使 $x+a$ 是負數亦然，此時 y 位於 $(-1,0]$ 之內。這一點在 (ii) 中至關重要。

第 (i) 部分

根號外的括號是 $x+1$，所以我們嘗試把它與 arcosh 公式中的 $x+a$ 配對。寫成 $\sqrt{x+3} = \sqrt{2x+6}\,/\sqrt{2}$，於是除了 $a=1$ 之外，還需要 $a+b=6$。由此得 $b=5$，故 $b-a=4$。取這些數值時，假設 $x+a>0$、$x+b>0$ 及 $b>a$ 在 $x>-1$ 時全部成立，而且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh}\left(\frac{x+5}{x+1}\right) = -\frac{2}{(x+1)\sqrt{2x+6}} = -\frac{\sqrt{2}}{(x+1)\sqrt{x+3}}.$$

兩邊除以 $-\sqrt{2}$，

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcosh}\left(\frac{x+5}{x+1}\right) + C.$$

第 (ii) 部分

現在根號外的括號是 $x+3$，所以我們把它與 arcsin 公式中的 $x+b$ 配對：$b=3$。根號內需要 $a+b+2x=2(x+1)$，所以 $a+b=2$，$a=-1$。於是 $b-a=4$，並且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin\left(\frac{x-1}{x+3}\right)=\frac{2}{(x+3)\sqrt{2x+2}}=\frac{\sqrt{2}}{(x+3)\sqrt{x+1}}.$$

想一想 當 $a=-1$ 時，假設 $x+a>0$ 要求 $x>1$。我們的答案在整個範圍 $x>-1$ 上仍然成立嗎？

成立。正如上文所見，arcsin 的公式只需要 $x+b>0$ 及 $a+b+2x>0$。在這裏，這兩個條件就是 $x+3>0$ 及 $2x+2>0$，對所有 $x>-1$ 都成立。在這個範圍內，$(x-1)/(x+3)$ 由 -1 向上趨近 1，所以 arcsin 有定義。因此，對 $x>-1$，

$$\int\frac{1}{(x+3)\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x-1}{x+3}\right)+C.$$

另一做法：代換

兩個積分也可以用代換（substitution）$u=\sqrt{x+c}$ 解決，其中 $x+c$ 是根號下的式子，因為這時 $\mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$。在 (ii) 中，取 $u=\sqrt{x+1}$，積分變成 $\int\frac{2}{u^2+2}\,\mathrm{d}u=\sqrt{2}\arctan(\sqrt{(x+1)/2})+C$。這與我們的答案只相差常數 $-\pi/(2\sqrt{2})$。在 (i) 中，取 $u=\sqrt{x+3}$，得到 $\int\frac{2}{u^2-2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2}}\right|+C$。這正是以對數（logarithm）寫出的 arcosh 答案。

驗算

- 把答案求導還原。例如，在 $x=0$ 處，$\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x-1}{x+3}$ 的導數應為 $\frac{1}{3}$，而上面的公式給出 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot3\cdot1}=\frac{1}{3}$。
- 數值上，用辛普森法則（Simpson's rule）可得 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x+3}}\approx0.374543$ 及 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x+3)\sqrt{x+1}}\approx0.240301$。兩個數值與原函數（antiderivative）算出的結果吻合，誤差小於 10^{-12}。在下限低至 $x=-0.9$ 的區間上，結果同樣吻合，而這些區間已伸入 $-1<x<1$ 的範圍，即 (ii) 中 $x+a<0$ 之處。
- 正負號：(i) 的被積函數是正的，所以它的積分應該遞增。我們的答案確是如此，因為 $\frac{x+5}{x+1}$ 隨 x 增加而遞減，所以它的 arcosh 的負值遞增。

常見錯誤

- 把括號配錯公式：在 (i) 中，根號外的 $x+1$ 是常數較小的那個，所以它必定是 $x+a$，即要用 arcosh，而不是 arcsin。
- 忘記了把 $\sqrt{x+3}$ 寫成 $\sqrt{2x+6}/\sqrt{2}$ 時所產生的因子 $\sqrt{2}$。
- 漏掉 arcosh 導數中的負號，這個負號來自 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x < 0$。

STEP 之外

(ii) 的兩個答案，一個用 arcsin，一個用 arctan，兩者相差一個常數。這是必然的，因為在一個區間上導數相同的兩個函數只相差一個常數，這是中值定理（mean value theorem）的推論。若集合由兩段分開的部分組成，各段上的常數便可以不同。(i) 中出現對數也並非偶然：反雙曲函數（inverse hyperbolic functions）其實是喬裝了的對數，這正是 $1/\sqrt{\text{二次式}}$ 的積分不是得出反三角函數（inverse trigonometric functions）便是得出對數的原因。Abbott 的 *Understanding Analysis* 嚴謹地證明了中值定理，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 則收錄了更多這類積分。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。