詳細解答

STEP II 2003，第 9 題

力學 • 極限摩擦力平衡

STEP II 2003，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/03-s2-q9

關鍵思路

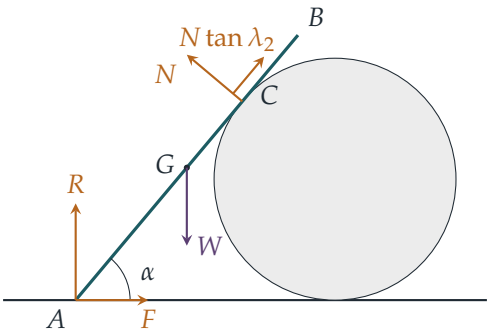
由於摩擦系數（coefficient of friction）是以 $\tan\lambda_1$ 和 $\tan\lambda_2$ 的形式給出，最自然的工具就是總反作用力（total reaction，即把法向反作用力（normal reaction）與摩擦力合成為一個力）。當摩擦達到極限（limiting）時，總反作用力與法線的夾角就是摩擦角（angle of friction）λ。這樣一來，桿只受三個力作用，而且三個力的方向都已知；沿水平和垂直方向分解（resolve），便得到兩條方程，其中只有兩個未知的大小。真正要花工夫的，只是判斷每個摩擦力指向哪一邊。

解答

模型與摩擦力的方向

我們把桿視為均勻（uniform）的剛體（rigid body）桿，並把圓柱視為固定不動。桿沿切線（tangent）與圓柱接觸，所以在 C 處的法向反作用力垂直於桿。設圓柱位於 A 的水平正方向一側。於是作用在桿上的力有：

- 桿的重量 W，作用於中點 G，垂直向下；
- 在 A 處：垂直向上的法向反作用力 R，以及沿地面的摩擦力 F；
- 在 C 處：垂直於桿的法向反作用力 N，指向上方並向後偏往 A 的一邊，另有一個沿桿方向的摩擦力。



想一想 在 A 處和在 C 處，摩擦力分別指向哪一邊？桿會不會是即將向相反方向滑動？

桿要同時保持兩個接觸點，就只有一種運動方式：當 A 沿地面滑動時，角 α 隨之改變，桿亦在圓柱上滑過。若 A 遠離圓柱，桿便會下降（即 α 減小），而桿上位於 C 的那一點相對於圓柱沿桿向下滑動。若 A 移向圓柱，一切就反過來。

在第二種情況下，A 處的摩擦力會指向遠離圓柱的方向，而 C 處的摩擦力會沿桿向下。這樣三個水平方向的力（A 處的摩擦力、N 的水平分量，以及 C 處摩擦力的水平分量）全都指向遠離圓柱的一邊，水平方向便不可能平衡。所以在極限平衡（limiting equilibrium）時，桿是即將向下滑：桿在 A 處所受的摩擦力指向圓柱，而 C 處的摩擦力沿桿向上，正如圖中所示。

總反作用力

設 S 為 A 處的總反作用力，T 為 C 處的總反作用力。由於兩個接觸點的摩擦都達到極限：

- S 與向上的垂直線成 λ_1 角，並向圓柱一方傾斜，因為 $F = R\tan\lambda_1$。
- C 處的法線與向上的垂直線成 α 角，並向後偏往 A 的一邊，因為桿與水平線成 α 角。沿桿向上的摩擦力使 T 朝垂直線轉回 λ_2。所以 T 與向上的垂直線成 $\alpha - \lambda_2$ 角，這個角是在遠離圓柱的一側量度的。

對桿分解各力，

$$\begin{aligned} &\text{水平方向：} && S\sin\lambda_1 = T\sin(\alpha - \lambda_2), \\ &\text{垂直方向：} && S\cos\lambda_1 + T\cos(\alpha - \lambda_2) = W. \end{aligned}$$

為了消去 T，我們把第一條方程乘以 $\cos(\alpha-\lambda_2)$，把第二條乘以 $\sin(\alpha-\lambda_2)$，再從第二條減去第一條：

$$\begin{aligned} S\left[\cos\lambda_1\sin(\alpha-\lambda_2)+\sin\lambda_1\cos(\alpha-\lambda_2)\right] &= W\sin(\alpha-\lambda_2),\\ S\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2) &= W\sin(\alpha-\lambda_2), \end{aligned}$$

這裏用了 sin 的複角公式（addition formula）。題目告訴我們 $\alpha\neq\lambda_2-\lambda_1$，所以 $\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)\neq 0$（所有角都是銳角，所以 $\alpha+\lambda_1-\lambda_2$ 嚴格介乎 $-\frac{\pi}{2}$ 與 π 之間）。因此可以相除：

$$S=\frac{W\sin(\alpha-\lambda_2)}{\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)}.$$

A 處的摩擦力就是 S 的水平分量，即 $F=S\sin\lambda_1$，所以

$$F=\frac{W\sin\lambda_1\,\sin(\alpha-\lambda_2)}{\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)},$$

這正是所求。同樣地，$T=W\sin\lambda_1/\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)$。

想一想 我們從頭到尾都沒有取力矩（moment）。這不是很可疑嗎？

在這裏並不可疑。沿兩個方向分解，已足以求出兩個未知的大小。對 A 取力矩（S 對該點沒有力矩，C 處的摩擦力沿桿作用，同樣沒有力矩），得 $N\cdot AC=W\cdot AG\cos\alpha$，其中 $N=T\cos\lambda_2$。這只告訴我們，要達到極限平衡，C 必須位於哪裏：

$$\frac{AC}{AB}=\frac{\cos\alpha\,\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)}{2\sin\lambda_1\cos\lambda_2}.$$

求摩擦力時，並不需要用到題目所給的條件 $AC>CB$。從物理上說，我們還需要 $S>0$ 和 $T>0$，而這恰好在 $\alpha>\lambda_2$ 時成立：桿若以小於 λ_2 的傾角擱在圓柱上，就不可能處於即將沿圓柱滑下的狀態。

驗算

- 地面光滑，$\lambda_1=0$：公式給出 $F=0$，理應如此。
- $\alpha=\lambda_2$：此時 T 是垂直的，單靠它就把桿托住，而 $F=0$。這是桿剛好能擱在圓柱上的臨界角度。
- 數值驗算：取 $\lambda_1=0.3$、$\lambda_2=0.5$、$\alpha=1.0$（弧度），直接從分量方程解出 R 和 N，得 $F\approx 0.1975W$，與公式吻合。在這個例子中，再對 A 取力矩，可知 C 大約位於桿長的 0.75 處，與 $AC>CB$ 相符。

常見錯誤

- 把 C 處的反作用力當成垂直的，或當成垂直於圓柱的「頂部」。反作用力應垂直於公切線，而公切線就是桿本身。
- 選定摩擦力的方向卻不加檢驗。選錯了那一對方向，水平方向便不可能平衡。
- 把 C 處的總反作用力向錯誤的一邊傾斜，結果得出 $\alpha + \lambda_2$ 而不是 $\alpha - \lambda_2$。

STEP 之外

取總反作用力與法線成 λ 角，正是摩擦錐（cone of friction）背後的想法：只要總反作用力留在以法線為軸、半頂角為 λ 的圓錐之內，接觸點就不會滑動。若只有三個力，它們的作用線（line of action）還必須交於一點，這就把許多靜力學（statics）問題變成幾何問題。有多個粗糙接觸點、而且各接觸點滑動的先後次序有影響的問題，是剛體靜力學的上佳入門。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對摩擦和剛體平衡有仔細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。