詳細解答

STEP II 2003，第 8 題

純數學 • 可分離變量微分方程

STEP II 2003，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/03-s2-q8

關鍵思路

這是一階可分離變數（separable）的微分方程：$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 等於 t 的一個有理函數（rational function）。把那個二次式除以 $t+1$，這個函數便分拆成一個多項式加一個簡單分式，兩者都可以立即積分。至於駐點（stationary point），直接由微分方程本身便可得出，無須對解求導：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$ 恰好在二次式 t^2-3t+2 等於零之處成立。

解答

求 y

由多項式除法（polynomial division）得

$$\frac{t^2-3t+2}{t+1}=t-4+\frac{6}{t+1},$$

因為 $(t+1)(t-4)+6=t^2-3t-4+6=t^2-3t+2$。

解必須由 $y=A>0$ 出發。假如 y 在某處等於零，則根據這個線性方程的解的唯一性（uniqueness），它必定是零解，這與 $y(0)=A$ 矛盾。所以自始至終 $y>0$（在 $t>-1$ 上，即係數有定義的範圍內），因此可以除以 y：

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-k\left(t-4+\frac{6}{t+1}\right).$$

由 0 積分至 t，並利用 $\ln 1=0$，

$$\ln\frac{y}{A}=-k\left(\frac{t^2}{2}-4t+6\ln(t+1)\right),$$

所以

$$\boxed{y = A\,(t+1)^{-6k}\,\mathrm{e}^{-k(t^2/2-4t)} = A\,(t+1)^{-6k}\,\mathrm{e}^{k(8t-t^2)/2}}.$$

駐點值

由微分方程得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -k\,\frac{(t-1)(t-2)}{t+1}\,y.$$

我們假設 $k \neq 0$（否則 $y \equiv A$，每一點都是駐點）。由於 $y > 0$ 及 $t+1 > 0$，導數只在 $t = 1$ 和 $t = 2$ 處等於零，而且因為兩者都是單根（simple root），導數在這兩處都會變號。所以恰好有兩個駐點值（stationary value）：

$$y(1) = A \cdot 2^{-6k}\,\mathrm{e}^{-k(1/2-4)} = A \cdot 2^{-6k}\,\mathrm{e}^{7k/2},$$
$$y(2) = A \cdot 3^{-6k}\,\mathrm{e}^{-k(2-8)} = A \cdot 3^{-6k}\,\mathrm{e}^{6k}.$$

兩者之比為

$$\frac{y(1)}{y(2)} = \frac{3^{6k}}{2^{6k}}\,\mathrm{e}^{7k/2-6k} = \left(\frac{3}{2}\right)^{6k}\mathrm{e}^{-5k/2},$$

正是所求。

? **想一想** 兩個駐點值之中，哪一個較大？

取對數：

$$\ln\frac{y(1)}{y(2)} = k\left(6\ln\tfrac{3}{2} - \tfrac{5}{2}\right),$$

而 $6\ln 1.5 \approx 2.433 < 2.5$，所以括號內的數是負數（約為 -0.067）。因此當 $k > 0$ 時 $y(1) < y(2)$，當 $k < 0$ 時 $y(1) > y(2)$。兩者相差很小，所以圖像上的起伏十分平緩。同樣地，

$$\ln\frac{y(1)}{A} = k\left(\tfrac{7}{2} - 6\ln 2\right) \approx -0.659k, \qquad \ln\frac{y(2)}{A} = k(6 - 6\ln 3) \approx -0.592k,$$

所以當 $k > 0$ 時兩個駐點值都小於 A，當 $k < 0$ 時兩個都大於 A。

當 $t \to +\infty$ 時的表現

寫成

$$\ln\frac{y}{A} = -k\left(\frac{t^2}{2} - 4t + 6\ln(t+1)\right).$$

當 $t \to \infty$ 時，括號內的式子趨向 $+\infty$，並由 $\frac{1}{2}t^2$ 主導（ln 項的增長慢得多）。所以：

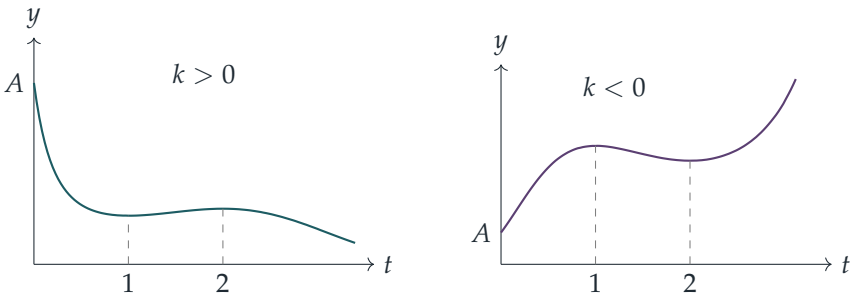
- 若 $k > 0$，則 $\ln(y/A) \to -\infty$，所以 $y \to 0$（速度極快，有如 $\mathrm{e}^{-kt^2/2}$）；
- 若 $k < 0$，則 $\ln(y/A) \to +\infty$，所以 $y \to \infty$（有如 $\mathrm{e}^{|k|t^2/2}$）。

草圖

當 $t > 0$ 時，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 的正負號與 $-k(t-1)(t-2)$ 的正負號相同。

- $k > 0$：y 在 $(0,1)$ 上由 A 遞減，在 $t = 1$ 處達到局部極小值（local minimum），然後上升，在 $t = 2$ 處達到局部極大值（local maximum）（仍然低於 A），其後遞減並趨向 0。
- $k < 0$：y 由 A 遞增，在 $t = 1$ 處達到局部極大值，然後下降，在 $t = 2$ 處達到局部極小值（仍然高於 A），其後無止境地遞增。

以下圖像是取 $A = 1$ 及 $k = \pm 2$ 準確繪製的。



驗算

- 在 $t = 0$ 處，公式給出 $A \cdot 1 \cdot \mathrm{e}^0 = A$。對 $\ln y = \ln A - 6k\ln(t+1) - k(t^2/2 - 4t)$ 求導，得 $\frac{y'}{y} = -\frac{6k}{t+1} - k(t-4)$，合併後便回到原來的方程。
- 數值方面，取 $A = 1.5$ 及 $k = \pm 2$，以龍格－庫塔法（Runge–Kutta）逐步對微分方程積分，在 $t = 3$ 處所得結果與公式吻合至八位有效數字。取 $k = 2$ 時，比值 $y(1)/y(2)$ 為 0.8742，與 $(1.5)^{12}\mathrm{e}^{-5}$ 相符。

常見錯誤

- 除法出錯：餘數是 6，不是 2。可乘回 $t + 1$ 來檢查。
- 把比值倒轉：題目要求的是 $y(1)/y(2)$，而指數中的正負號很容易令人誤得 $y(2)/y(1)$。
- 草圖中把兩個轉向點（turning point）畫在 A 的錯誤一側：先前的計算表明，當 $k > 0$ 時兩者都低於 A，當 $k < 0$ 時兩者都高於 A。

STEP 之外

這個方程是線性的，形如 $y' + p(t)y = 0$，而它的解 $A\exp\left(-\int_0^t p\right)$ 正是積分因子法（integrating-factor method）最簡單的情形。它也說明了你在第一門常微分方程（ODE）課程中會遇到的一個普遍原則：很多時候無須解出方程，便可直接從方程本身看出解的定性特徵（駐點、解的正負號、增長或衰減）。Boyce 與 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（常微分方程入門教科書）對這兩個想法都有詳細闡述，當中包括我們用來證明 y 永不為零的唯一性定理（uniqueness theorem）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。