詳細解答

STEP II 2003，第 7 題

純數學 • 廣義積分與級數

> **STEP II 2003，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q7

關鍵思路

形如 $\ln x \times$ (冪，底數為x) 的被積函數（integrand），最適合用分部積分法（integration by parts）處理：對對數求導，它便會消失。第一個積分就這樣解決了。題目餘下的部分把精確值 $2/(n^2\mathrm{e})$ 反過來用：它讓我們可以把 $1/n^2$ 寫成一個積分。然後我們把所有積分下限移到同一位置，這樣只會令每個積分變大，再在積分號內把一個等比級數（geometric series）加起來。

解答

積分

對 $a > 1$ 及 $n > 0$，設

$$I_n(a) = \int_a^\infty \frac{\ln x}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

取 $u = \ln x$ 及 $\mathrm{d}v = x^{-n-1}\,\mathrm{d}x$ 作分部積分，於是 $v = -\frac{1}{n}x^{-n}$（這裏用到 $n \neq 0$）。在 $[a, X]$ 上，

$$\begin{aligned}\int_a^X \frac{\ln x}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln x}{nx^n}\right]_a^X + \frac{1}{n}\int_a^X x^{-n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln a}{na^n} - \frac{\ln X}{nX^n} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a^n} - \frac{1}{X^n}\right).\end{aligned}$$

現在令 $X \to \infty$。由於 $n > 0$，$X^{-n} \to 0$。至於另一項，設 $Y = X^n$，則 $\ln X = \frac{1}{n}\ln Y$，並且

$$\frac{\ln X}{X^n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\ln Y}{Y} \to 0,$$

因為當 $X \to \infty$ 時 $Y \to \infty$，而題目容許我們假設 $(\ln Y)/Y \to 0$。（這裏不能直接引用 $(\ln X)/X \to 0$：當 $0 < n < 1$ 時，X^n 增長得比 X 慢。）所以這個積分收斂（converge），並且

$$I_n(a) = \frac{\ln a}{na^n} + \frac{1}{n^2 a^n}.$$

當 $a = \mathrm{e}^{1/n}$ 時，$a^n = \mathrm{e}$ 且 $\ln a = 1/n$，所以

$$I_n(\mathrm{e}^{1/n}) = \frac{1}{n^2\mathrm{e}} + \frac{1}{n^2\mathrm{e}} = \frac{2}{n^2\mathrm{e}},$$

這正是所求的結果。

比較兩個積分

若 $1 < a < b$，則

$$I_n(a) - I_n(b) = \int_a^b \frac{\ln x}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

對 $x > 1$，有 $\ln x > 0$ 及 $x^{n+1} > 0$，所以被積函數在 $[a, b]$ 上嚴格為正。它同時是連續的，而且 $b > a$，所以這個積分嚴格為正。因此 $I_n(b) < I_n(a)$：把積分下限向右移，等於捨棄了一塊正的面積。

不等式

由第一部分，對每個正整數 n，

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\mathrm{e}}{2}\, I_n(\mathrm{e}^{1/n}).$$

> **想一想** 和式中每一項的積分下限 $\mathrm{e}^{1/n}$ 各不相同，但右邊只有單一個下限 $\mathrm{e}^{1/N}$。我們怎樣由前者過渡到後者？

取 $1 \le n \le N$。那麼 $1/N \le 1/n$，所以 $1 < \mathrm{e}^{1/N} \le \mathrm{e}^{1/n}$。當 $n < N$ 時不等式是嚴格的，而第二部分（取 $a = \mathrm{e}^{1/N}$，$b = \mathrm{e}^{1/n}$）給出

$$I_n(\mathrm{e}^{1/n}) < I_n(\mathrm{e}^{1/N});$$

當 $n = N$ 時兩邊相等。對 $n = 1, \ldots, N$ 求和，所得的不等式是嚴格的，因為 $N > 1$ 意味着最少有一項（例如 $n = 1$）滿足 $n < N$：

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\mathrm{e}}{2} \sum_{n=1}^{N} I_n(\mathrm{e}^{1/n}) < \frac{\mathrm{e}}{2} \sum_{n=1}^{N} I_n(\mathrm{e}^{1/N}).$$

這正是需要用到 $N > 1$ 的地方。若 $N = 1$，兩邊便會相等。

餘下的工作是把這些積分加起來。有限個在同一範圍上收斂的積分之和，等於各被積函數之和的積分，所以

$$\sum_{n=1}^{N} I_n(\mathrm{e}^{1/N}) = \int_{\mathrm{e}^{1/N}}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} x^{-(n+1)} \right) \ln x\,\mathrm{d}x.$$

括號內是一個等比級數，首項為 x^{-2}，公比為 $x^{-1} \neq 1$（因為 $x > 1$），共 N 項：

$$\sum_{n=1}^{N} x^{-(n+1)} = \frac{x^{-2}(1 - x^{-N})}{1 - x^{-1}} = \frac{1 - x^{-N}}{x^2 - x},$$

這裏分子和分母同乘以 x^2。因此

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < \frac{\mathrm{e}}{2} \int_{\mathrm{e}^{1/N}}^{\infty} \left(\frac{1 - x^{-N}}{x^2 - x} \right) \ln x \, \mathrm{d}x,$$

正如所求。

驗算

- 把 $I_n(a)$ 的公式對 a 求導：你應該得到 $-\ln a / a^{n+1}$，即被積函數的相反數，正如微積分基本定理（fundamental theorem of calculus）所要求的。
- 數值上，利用代換（substitution）$x = \mathrm{e}^u$，最後一部分的積分變成 $\int_{1/N}^{\infty} u(1 - \mathrm{e}^{-Nu})/(\mathrm{e}^u - 1) \, \mathrm{d}u$。當 $N = 2$ 時，右邊約為 1.4865，而左邊是 $1 + \frac{1}{4} = 1.25$。當 $N = 10$ 時，右邊約為 2.0579，而左邊是 1.5498。
- 當 $N \to \infty$ 時，右邊趨向 $\frac{\mathrm{e}}{2} \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 - x} \, \mathrm{d}x$，而代換 $x = 1/t$ 把它化為 $\frac{\mathrm{e}}{2} \int_0^1 \frac{-\ln t}{1-t} \, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} \approx 2.236$。這個值明顯大於 $\pi^2/6 \approx 1.645$，而這是必然的。

常見錯誤

- 直接用 $(\ln X)/X \to 0$ 來消去 $(\ln X)/X^n$。這對 $n \geq 1$ 行得通，但題目的結果是對所有 $n > 0$ 而言的。
- 把積分下限移錯方向。由於 $\mathrm{e}^{1/N}$ 是各個 $\mathrm{e}^{1/n}$ 之中最小的，每個積分都會變大。
- 聲稱不等式是嚴格的，卻沒有說明原因。$n = N$ 的一項給出等式，所以嚴格性來自 $n < N$ 的各項，而這些項之所以存在，是因為 $N > 1$。

STEP 之外

把一個數寫成積分，然後在積分號內求和，是分析(analysis)中的標準手法。把這個做法推到極限，便得到 $\sum 1/n^2 = \int_0^1 \frac{-\ln t}{1-t} \, \mathrm{d}t$，這是通往 $\pi^2/6$ 的其中一條路徑。令 $N \to \infty$，就是把無窮和與反常積分（improper integral）交換次序。這個交換需要論證，要用到單調收斂定理或控制收斂定理（monotone or dominated convergence theorems），你會在大學的第一門分析或測度論(measure theory)課程中遇到它們。Abbott 的 *Understanding Analysis* 寫得平易近人，很適合用來了解這類交換為何可能失敗，以及何時才是安全的。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。