詳細解答

STEP II 2003，第 6 題

純數學 • 迭代函數與積分

> **STEP II 2003，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q6

關鍵思路

再施行一次 f，意思就是「先減去 1，再把負的部分反射回橫軸上方」。若某一段圖像的值介乎 0 與 1 之間，這樣做只會把該段在帶狀區域 $0 \le y \le 1$ 內上下倒轉，而兩條長長的直線臂則各多出一個鋸齒。於是圖像變成鋸齒形（三角波，triangle wave）；看出這一點之後，最後一部分的兩個積分都只是若干個相同週期上的積分之和。

解答

略圖

整個解答只靠以下兩項事實。

遞推關係（*recurrence*）。由於 $g_{n+1} = f \circ g_n$，我們有 $g_{n+1}(x) = |g_n(x) - 1|$：把 g_n 的圖像向下平移 1，再把位於 x 軸下方的部分反射上去。

對稱性（*symmetry*）。由於 $f(2-x) = |1-x| = f(x)$，當 $n \ge 2$ 時可得 $g_n(2-x) = g_{n-1}(f(2-x)) = g_{n-1}(f(x)) = g_n(x)$，而 $n = 1$ 時則可直接驗證。所以每個 g_n 都關於直線 $x = 1$ 對稱，只需弄清楚 $x \ge 1$ 的情況便可。

先從 $g_1(x) = |x-1|$ 開始，這是一個頂點在 $(1,0)$ 的 V 形。

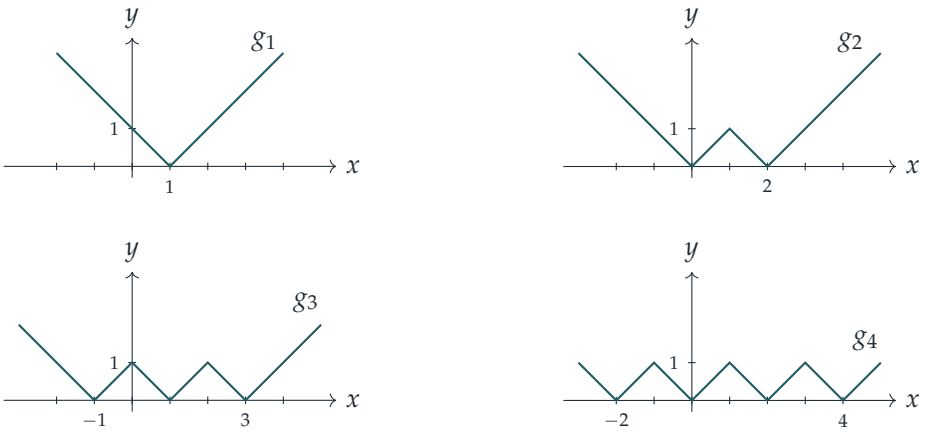
至於 g_2：在 $[0,2]$ 上有 $0 \le g_1 \le 1$，所以 $g_2 = 1 - |x-1|$，是一個帳篷形，在 $x = 1$ 處升至 1，在 $x = 0$ 和 $x = 2$ 處降至 0。當 $x \ge 2$ 時，$g_2 = x - 2$；由對稱性，當 $x \le 0$ 時 $g_2 = -x$。所以 g_2 呈 W 形。

之後每一步都是做同樣的事：鋸齒部分（取值在 $[0,1]$ 內）上下倒轉，而直線臂 $x - n$ 變成 $|x-n-1|$，在 $[n, n+1]$ 上多添一個鋸齒（由對稱性，在 $[1-n, 2-n]$ 上亦然）。以

$d_{\text{even}}(x)$ 和 $d_{\text{odd}}(x)$ 分別表示 x 與最接近的偶數及最接近的奇數之間的距離，便得

$$g_n(x) = \begin{cases} 2-n-x, & x \le 2-n, \\ d_{\text{even}}(x)\text{（若 } n \text{ 為偶數），} d_{\text{odd}}(x)\text{（若 } n \text{ 為奇數），} & 2-n \le x \le n, \\ x-n, & x \ge n. \end{cases}$$

這個結果可由遞推關係用歸納法（induction）證明：對任意實數 x 都有 $d_{\text{even}} + d_{\text{odd}} = 1$（在兩個相鄰整數之間，這兩個距離分別是 t 和 $1-t$），所以「1 減去鋸齒」會把奇偶性對調；而在 $[n, n+1]$ 上，新增的一段 $n+1-x$ 正好是到 $n+1$ 的距離，而 $n+1$ 就是具有新奇偶性的最接近整數。左邊的部分則由關於 $x=1$ 的對稱性得出。



用文字描述：g_3 的零點在 $-1, 1, 3$，在 0 和 2 處有高度為 1 的尖峯，兩臂為 $y = -1-x$ 和 $y = x-3$；g_4 的零點在 $-2, 0, 2, 4$，在 $-1, 1, 3$ 處有高度為 1 的尖峯，兩臂為 $y = -2-x$ 和 $y = x-4$。四個圖像都關於 $x=1$ 對稱。

積分

設 n 為偶數。由於 $n \ge 2$，區間 $[0, n]$ 包含在 $[2-n, n]$ 之內，所以在這個區間上 $g_n(x) = d_{\text{even}}(x)$。

> **想一想** 為甚麼只需在 $[0, 2]$ 上積分便足夠？

兩個函數的週期（period）都是 2：$d_{\text{even}}(x+2) = d_{\text{even}}(x)$，因為平移 2 會把偶數映到偶數；而 $\left|\sin\frac{\pi(x+2)}{2}\right| = \left|-\sin\frac{\pi x}{2}\right| = h(x)$。由於 n 是偶數，$[0, n]$ 正好由 $\frac{n}{2}$ 個完整週期 $[0,2], [2,4], \ldots, [n-2, n]$ 組成，所以在 $[0, n]$ 上的每個積分都是在 $[0, 2]$ 上的積分的 $\frac{n}{2}$ 倍。

在 $[0,2]$ 上，g_n 就是帳篷形 $1-|x-1|$：一個底為 2、高為 1 的三角形，所以

$$\int_0^2 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = 1.$$

在 $[0,2]$ 上，$\frac{\pi x}{2}\in[0,\pi]$，所以 $\sin\frac{\pi x}{2}\geq 0$，絕對值（modulus）符號可以略去：

$$\int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\Big]_0^2 = \frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

因此

$$\int_0^n \big(h(x)-g_n(x)\big)\,\mathrm{d}x = \frac{n}{2}\Big(\frac{4}{\pi}-1\Big) = \frac{2n}{\pi}-\frac{n}{2},$$

這正是所求。

驗算

- 取一個數值，親手迭代一次：$g_4(-1)$：$-1\to 2\to 1\to 0\to 1$，所以 $g_4(-1)=1$，是一個尖峯，與略圖相符。
- 答案是正數，因為 $4/\pi\approx 1.27>1$：正弦拱形比同底同高的直邊帳篷形向外鼓出，這與兩個圖像的形狀吻合。
- 數值方面，取 $n=2$ 時用辛普森法則（Simpson's rule）計算得 0.273240，與 $\frac{4}{\pi}-1\approx 0.273240$ 一致；當 $n=4,6,8,10$ 時同樣吻合。

常見錯誤

- 忘記左邊的部分：當 $n\geq 3$ 時，在 $x<0$ 的範圍內圖像並不是直線。利用對稱性 $g_n(2-x)=g_n(x)$ 是把這部分畫對的最快方法。
- 在 $[0,n]$ 上積分 $\sin\frac{\pi x}{2}$ 時漏掉絕對值，這樣對偶數 n 會得出 0，而不是 $\frac{2n}{\pi}$。

STEP 之外

把一個簡單的映射反覆迭代，觀察圖像如何變化，正是離散動力系統（discrete dynamical systems）的起點。這裏的鋸齒最終穩定成一個三角波，而與之密切相關的「帳篷映射」（tent map）則是混沌（chaos）的經典例子。把 h 與三角波作比較，也引向傅立葉級數（Fourier series）：在那裏，三角波會寫成正弦與餘弦之和，而 $|\sin|$ 是最早遇到的例子之一。Boyce 與 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）對傅立葉級數有一段易讀的入門介紹。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。