詳細解答

STEP II 2003，第 5 題

純數學 • 直線的向量幾何

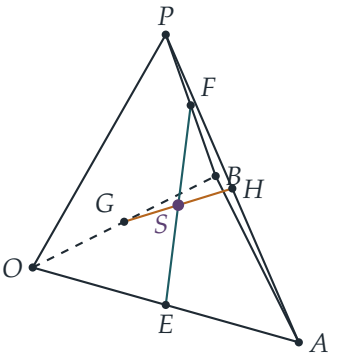
STEP II 2003，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/03-s2-q5

關鍵思路

先寫出四個中點，把每條直線寫成「點 + 參數 × 方向」的形式，然後令兩者相等。三維空間中的兩條直線通常不會相交，因此真正要做的，是證明這三條含兩個未知參數的分量方程是相容（consistent）的。**k** 分量很快就能解決問題。從幾何上看，O、A、B、P 構成一個四面體（tetrahedron），而 EF 和 GH 各自連接一對對稜的中點。由此可以猜想，它們相交於四個頂點的「平均」位置。



解答

直線 EF 與 GH 相交

設 $\mathbf{p} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$。各中點的位置向量（position vector）為

$$\mathbf{e} = \tfrac{1}{2}a\mathbf{i}, \qquad \mathbf{f} = \tfrac{1}{2}(l\mathbf{i} + (b+m)\mathbf{j} + n\mathbf{k}),$$
$$\mathbf{g} = \tfrac{1}{2}b\mathbf{j}, \qquad \mathbf{h} = \tfrac{1}{2}((a+l)\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}).$$

EF 上的一般點是 $\mathbf{e} + s(\mathbf{f} - \mathbf{e})$，而 GH 上的一般點是 $\mathbf{g} + t(\mathbf{h} - \mathbf{g})$。把兩者都乘以二以消去二分之一，得

$$2(\mathbf{e} + s(\mathbf{f} - \mathbf{e})) = (a + s(l-a))\mathbf{i} + s(b+m)\mathbf{j} + sn\,\mathbf{k},$$
$$2(\mathbf{g} + t(\mathbf{h} - \mathbf{g})) = t(a+l)\mathbf{i} + (b + t(m-b))\mathbf{j} + tn\,\mathbf{k}.$$

兩條直線相交，當且僅當存在 s 和 t 的值使以上兩式相等，因此以下三式必須全部成立：

$$\mathbf{i}: \quad a + s(l-a) = t(a+l),$$
$$\mathbf{j}: \quad s(b+m) = b + t(m-b),$$
$$\mathbf{k}: \quad sn = tn.$$

想一想 三條方程、兩個未知數：為甚麼它們竟然會有解？

一般而言是沒有解的，這正是空間中兩條直線通常不會相交的原因。這裏我們先解其中兩條方程，再驗證第三條也成立。由於 $n \neq 0$，$\mathbf{k}$ 方程給出 $s = t$。於是 $\mathbf{i}$ 方程變成 $a + sl - sa = sa + sl$，即 $a = 2sa$，而由於 $a \neq 0$，我們得到 $s = \frac{1}{2}$。最後，當 $s = t = \frac{1}{2}$ 時，$\mathbf{j}$ 方程成為

$$\tfrac{1}{2}(b+m) = b + \tfrac{1}{2}(m-b) = \tfrac{1}{2}(b+m),$$

這是成立的。所以當 $s = t = \frac{1}{2}$ 時三條方程全部成立，直線 EF 與 GH 相交，正如所求。

交點是 EF 的中點（也是 GH 的中點）：

$$\mathbf{s} = \tfrac{1}{4}((a+l)\mathbf{i} + (b+m)\mathbf{j} + n\mathbf{k}) = \tfrac{1}{4}(\mathbf{0} + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + \mathbf{p}),$$

即 O、A、B 和 P 的位置向量的平均。

點 T

由於 S 是 DT 的中點，我們有 $\mathbf{s} = \frac{1}{2}(\mathbf{d} + \mathbf{t})$，所以 $\mathbf{t} = 2\mathbf{s} - \mathbf{d}$：

$$\mathbf{t} = \tfrac{1}{2}(a+l)\,\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}(b+m)\,\mathbf{j} + (\tfrac{1}{2}n - d)\mathbf{k}.$$

平面 OAB 包含 O 以及向量 $a\mathbf{i}$ 和 $b\mathbf{j}$。由於 a 和 b 均不為零，這兩個向量分別沿 x 軸和 y 軸的方向，所以平面 OAB 就是平面 $z = 0$。因此 T 位於該平面上，當且僅當它的 $\mathbf{k}$ 分

量為零，即 $\frac{1}{2}n - d = 0$。故此

$$d = \tfrac{1}{2}n.$$

由於 $n \neq 0$，這個值不為零，所以與條件 $d \neq 0$ 並無矛盾。

驗算

- 取 $a = 2$，$b = 4$，$\mathbf{p} = (2,0,4)$。則 $E = (1,0,0)$，$F = (1,2,2)$，$G = (0,2,0)$，$H = (2,0,2)$。EF 和 GH 的中點都是 $(1,1,1)$，亦即 $\frac{1}{4}\big((0,0,0) + (2,0,0) + (0,4,0) + (2,0,4)\big)$。
- 取 $d = 2 = \frac{1}{2}n$，則 $T = 2(1,1,1) - (0,0,2) = (2,2,0)$，它位於 $z = 0$ 上。
- 我們以電腦用精確的有理數運算，對 20 000 組隨機選取的 a, b, l, m, n, d 作了檢驗，確認兩條直線在 $s = t = \frac{1}{2}$ 時相交於上述的點，並且 T 位於平面 OAB 上（純量三重積（scalar triple product）為零）當且僅當 $d = \frac{1}{2}n$。

常見錯誤

- 一開始就用同一個參數來令兩條直線相等。這樣做等於預先假設了答案 $s = t$，而在這裏它是由 **k** 方程推出來的。
- 解了其中兩條分量方程就停下來。要證明空間中兩條直線相交，還必須驗證第三條方程。
- 忘記說明在哪裏用到 $a \neq 0$ 和 $n \neq 0$：正是有了這兩個條件，我們才可以作除法求出 s 和 t。

STEP 之外

任何四面體中，連接對稜中點的三條直線（稱為雙中線（bimedians））全都通過它的形心（centroid），即四個頂點的平均，並且各自在該點被平分。這是「三角形的中線（median）交於形心」在三維空間中的近親，也讓我們初次體會到把點看成加權平均的想法，而這正是重心坐標（barycentric coordinates）和仿射坐標（affine coordinates）背後的概念。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）詳細闡述了這裏所用的向量與線性方程觀點，包括方程數目多於未知數的方程組在甚麼情況下相容。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。