詳細解答

STEP II 2003，第 4 題

純數學 • 弓形的面積

> **STEP II 2003，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q4

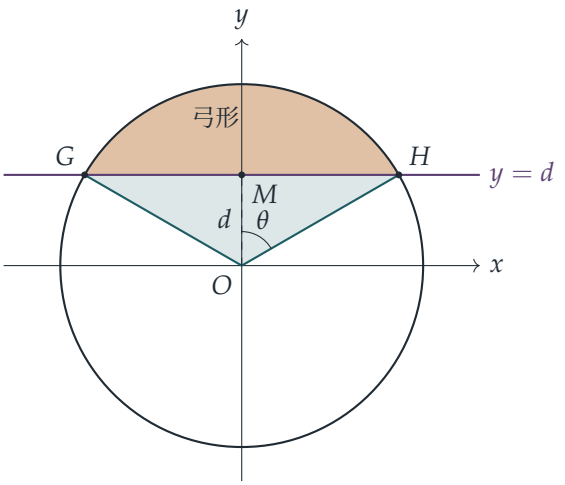
關鍵思路

劣弓形（minor segment）就是扇形（sector）減去一個三角形，所以第一個結果不過是「扇形減三角形」。至於其餘部分，留意在 $(*)$ 中，d 這個數其實是圓心到直線的垂直距離（*perpendicular distance*）。把圖形平移或旋轉都不會改變任何面積，所以在每一種情況下，我們都保留 $(*)$，只把 d 換成該距離。全部工夫都在於計算這個距離。

解答

基本結果

由於直線與圓相交於兩點，故 $0 < d < R$。把 $y = d$ 代入 $x^2 + y^2 = R^2$ 得 $x = \pm\sqrt{R^2 - d^2}$，所以 $G = (-\sqrt{R^2 - d^2}, d)$ 及 $H = (\sqrt{R^2 - d^2}, d)$。設 $M = (0, d)$ 為 GH 的中點，並設 $\theta = \angle MOH$。



在直角三角形 OMH 中，斜邊（hypotenuse）為 $OH = R$，鄰邊為 $OM = d$，所以 $\cos\theta = d/R$。由於 $0 < d/R < 1$，我們有 $\theta = \arccos(d/R)$，其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，而根據對稱性，$\angle GOH = 2\theta < \pi$。

圓心角為 2θ 的扇形 OGH，面積為

$$\tfrac{1}{2}R^2(2\theta) = R^2 \arccos\left(\frac{d}{R}\right).$$

三角形 OGH 的底為 $GH = 2\sqrt{R^2 - d^2}$，高為 $OM = d$，所以其面積為 $d\sqrt{R^2 - d^2}$。因為 $2\theta < \pi$，圓心 O 與劣弧（minor arc）分別位於 GH 的兩側，所以扇形恰好就是三角形加上劣弓形。因此

$$\text{劣弓形的面積} = R^2 \arccos\left(\frac{d}{R}\right) - d\sqrt{R^2 - d^2},$$

這就是 $(*)$。

想一想 從幾何的角度看，$(*)$ 中的 d 究竟代表甚麼？

上述論證完全沒有用到坐標軸：它只用到半徑 R，以及圓心到弦（chord）的距離 $OM = d$。把整個圖形平移（translation）或旋轉（rotation），這兩個量都保持不變，面積亦保持不變。所以對於任何半徑為 R 的圓，以及任何與圓心的垂直距離為 p 的直線，其中 $0 \le p < R$，劣弓形的面積為

$$R^2 \arccos\left(\frac{p}{R}\right) - p\sqrt{R^2 - p^2}. \qquad (\dagger)$$

（若 $p = 0$，直線就是直徑，兩部分是相等的兩半，而 $(\dagger)$ 正確地給出 $\frac{1}{2}\pi R^2$。）在每一部分中，我們求出 p，再代入 $(\dagger)$。

第 (i) 部分

圓心為 (a,b)，而直線 $y=c$ 是水平線，所以圓心到直線的距離為 $p=|c-b|$。把 d 換成 $|c-b|$：

$$R^2\arccos\left(\frac{|c-b|}{R}\right)-|c-b|\sqrt{R^2-(c-b)^2}.$$

這裏的絕對值（modulus）不可省略：c 可能小於 b。

第 (ii) 部分

這裏圓心為 O。我們需要求 O 到 $y=mx+c$ 的距離。設直線與 x 軸的夾角為 α，故 $\tan\alpha=m$，並設直線與 y 軸相交於 $C=(0,c)$。由 O 向直線作垂線，垂足為 F。OC（鉛垂）與 OF（垂直於直線）之間的夾角，等於水平線與該直線之間的夾角，即 α。所以在直角三角形 OFC 中，

$$p=OF=|c|\,|\cos\alpha|=\frac{|c|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{|c|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

（這就是常用公式 $|Ax_0+By_0+C|/\sqrt{A^2+B^2}$ 應用於直線 $mx-y+c=0$ 和點 $(0,0)$ 的結果。）於是

$$\sqrt{R^2-p^2}=\sqrt{R^2-\frac{c^2}{1+m^2}}=\frac{\sqrt{R^2(1+m^2)-c^2}}{\sqrt{1+m^2}},$$

所以劣弓形的面積為

$$R^2\arccos\left(\frac{|c|}{R\sqrt{1+m^2}}\right)-\frac{|c|\sqrt{R^2(1+m^2)-c^2}}{1+m^2}.$$

直線與圓相交，當且僅當 $c^2<R^2(1+m^2)$，所以平方根是實數。

第 (iii) 部分

設 $X=x-a$、$Y=y-b$，把原點移到圓心。圓變成 $X^2+Y^2=R^2$，而直線變成

$$Y+b=m(X+a)+c \quad\Longleftrightarrow\quad Y=mX+k, \qquad k=c+ma-b.$$

這就是把 c 換成 k 的第 (ii) 部分，而平移不會改變面積。所以 $p=|c+ma-b|/\sqrt{1+m^2}$，劣弓形的面積為

$$R^2\arccos\left(\frac{|c+ma-b|}{R\sqrt{1+m^2}}\right)-\frac{|c+ma-b|\sqrt{R^2(1+m^2)-(c+ma-b)^2}}{1+m^2}.$$

代入 $m=0$ 便得回第 (i) 部分，代入 $a=b=0$ 便得回第 (ii) 部分。

想一想 為甚麼在第 (i) 部分不能直接寫 $c-b$ 而不加絕對值？

若 $c < b$，則 $(c-b)/R$ 為負數，arccos 給出的角是大於 $\frac{\pi}{2}$ 的 $\pi - \theta$，而第二項亦會變號。該式變成 $R^2(\pi-\theta) + p\sqrt{R^2-p^2}$，這是優弓形（major segment）的面積，而不是劣弓形的面積。

驗算

- 取 $R = 2$、$d = 1$，得 $\theta = \frac{\pi}{3}$，而 $(*)$ 給出 $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2.4567$。這小於圓盤面積的一半（$2\pi \approx 6.28$），與預期相符。
- 當 $d \to R$ 時，面積趨向 0；而當 $d = 0$ 時，面積等於 $\frac{1}{2}\pi R^2$。
- 我們隨機選取了數百組圓和直線，把全部四條公式與直接對弦長作數值積分（numerical integration）的結果比較，兩者相差不超過 2×10^{-6}。

常見錯誤

- 漏掉絕對值。每當圓心位於直線「錯」的一側，帶正負號的距離便會給出優弓形的面積。
- 在第 (ii) 和第 (iii) 部分，用了鉛垂距離 $|c|$，而不是垂直距離 $|c|/\sqrt{1+m^2}$。
- 用 $\frac{1}{2}R^2\theta$ 計算扇形面積，忘記了圓心角是 2θ 而不是 θ。

STEP 之外

這道題建基於一個事實：面積在等距變換（isometry）之下保持不變，等距變換即平面上的平移、旋轉和反射（reflection）。在大學一年級的課程中，這會變成以下的說法：等距變換的雅可比行列式（Jacobian determinant）的絕對值為 1，所以二重積分（double integral）的變數代換公式不會改變面積。把等距變換分類，並找出它們所保持的量，是進入幾何學和羣論（group theory）的一條好途徑。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）講述了旋轉矩陣，以及行列式作為面積比例因子的角色。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。