詳細解答

STEP II 2003，第 3 題

純數學 • 無理數與數學歸納法

STEP II 2003，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/03-s2-q3

關鍵思路

無理性（irrationality）是一種「不是」型的性質，所以最自然的工具是逆否命題（contra-positive）：與其證明無理數（irrational number）的立方根（cube root）是無理數，不如證明立方根若是有理數（rational number），原數本身就必定是有理數。之後的歸納法（induction）全靠這一個事實推動，因為每個 u_{n+1} 都是 u_n 的立方根。至於最後一部分，我們留意到 $u_n \to 1$，於是把整個數列（sequence）平移一個整數，這樣每一項仍然是無理數。

解答

無理數的立方根

設 x 為實數，並設 $y = \sqrt[3]{x}$ 為它的實立方根，即 $y^3 = x$。我們證明逆否命題：若 y 是有理數，則 x 是有理數。

假設 $y = \dfrac{p}{q}$，其中 p, q 為整數且 $q \neq 0$。那麼

$$x = y^3 = \frac{p^3}{q^3},$$

而 p^3 和 q^3 都是整數，且 $q^3 \neq 0$。所以 x 是兩個整數之比，也就是有理數。

因此，有理的立方根只能來自有理數。換言之，若 x 是無理數，則 $\sqrt[3]{x}$ 不可能是有理數，所以它是無理數。這正是我們要證明的結論。

? **想一想** 為甚麼不直接處理原命題？

直接證明要從「x 不是整數之比」出發，但這句話沒有提供任何具體的東西可供計算。逆否命題則從「$y = p/q$」出發，馬上給了我們可以運算的整數，於是一行就證完了。每當假設說某個數*不是*有理數時，都值得試試逆否命題或反證法（proof by contradiction）。

歸納法

由於 $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n$，根據指數定律（laws of indices），

$$u_{n+1} = 5^{1/3^{n+1}} = \left(5^{1/3^n}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{u_n}.$$

所以每一項都是前一項的立方根。

基礎情況。$u_1 = 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$，題目已告訴我們它是無理數。

歸納步驟。假設對某個正整數 k，u_k 是無理數。那麼 $u_{k+1} = \sqrt[3]{u_k}$ 是一個無理數的立方根，所以根據第一部分，它是無理數。

因此，根據歸納法，對所有正整數 n，u_n 都是無理數。

收斂至 m 的數列

首先求 u_n 的極限（limit）。取對數（logarithm），

$$\ln u_n = \frac{\ln 5}{3^n} \to 0 \quad \text{當} n \to \infty,$$

而由於指數函數是連續（continuous）的，$u_n = \mathrm{e}^{\ln u_n} \to \mathrm{e}^0 = 1$。此外 $\ln u_n > 0$，所以對所有 n 都有 $u_n > 1$；各項遞減並趨向 1：

$$u_1 \approx 1.710, \quad u_2 \approx 1.196, \quad u_3 \approx 1.061, \quad u_4 \approx 1.020, \ldots$$

想一想 怎樣把極限由 1 移到 m，而又不破壞無理性？

無理數加上一個整數，結果仍是無理數。事實上，若 a 是整數，而 $u + a = r$ 是有理數，那麼 $u = r - a$ 也會是有理數，因為兩個有理數之差是有理數。

所以，對給定的整數 m，定義

$$a_n = u_n + m - 1 = 5^{1/3^n} + m - 1.$$

由於 $m - 1$ 是整數而 u_n 是無理數，每個 a_n 都是無理數，而且

$$a_n \to 1 + m - 1 = m \quad \text{當} n \to \infty.$$

所以 (a_n) 是一個由無理數組成、收斂（converge）至 m 的無窮數列。這個構造對任何整數 m 都適用，包括 $m = 0$。

（另一個自然的選擇是 $m\,u_n$，它同樣是無理數並趨向 m，但只限於 $m \neq 0$ 的情況：當 $m = 0$ 時，每一項都是 0，是有理數。所以平移 $m - 1$ 才是較穩妥的答案。）

驗算

- 數值上，$u_2^3 \approx 1.19581^3 \approx 1.70998 \approx u_1$，印證了 $u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n}$。
- 取 $m = 4$：$a_1 \approx 4.710$，$a_2 \approx 4.196$，$a_3 \approx 4.061$，而 a_{20} 與 4 相符至小數點後八位以上。
- 差 $a_n - m = u_n - 1$ 是正數，大小約為 $\ln 5/3^n$，所以每一步大約縮小至原來的 3 分之一。

常見錯誤

- 證明了逆命題（converse）（「無理數的立方是無理數」），而這個命題是錯的：$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$。
- 使用 $m\,u_n$，卻沒有留意到它在 $m = 0$ 時失效。
- 忘記說明為何 $u_n \to 1$；「指數趨向零」這句話還需要交代一下連續性，或者用上面的對數論證。

STEP 之外

這道題顯示無理數在實數線上是稠密（dense）的：每一個實數，而不僅是每一個整數，都是無理數的極限（試試 $q_n + \sqrt{2}/n$，其中有理數 $q_n \to x$）。有理數同樣稠密，但在某個精確的意義下，無理數遠比有理數多：有理數是可數（countable）的，而實數則不是。Abbott 的 *Understanding Analysis* 在開首幾章對稠密性、可數性和數列的極限有十分精彩的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。