詳細解答

STEP II 2003，第 2 題

純數學 • 反三角函數

> **STEP II 2003，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q2

關鍵思路

$a\cos\theta + b\sin\theta$ 這類式子，總可以寫成單一個餘弦 $R\cos(\theta - \alpha)$。這樣一來，方程就變成一個關於 arccos 的命題，而 α 本身則是一個 arctan。因此，只要找到一個漂亮的解 θ，關於 π 的恆等式（identity）不過是把「$\theta = (\theta - \alpha) + \alpha$」改寫一下而已。唯一真正要小心的地方，是驗證每個角都落在所用反函數（inverse function）的值域（range）之內。

解答

第一個恆等式

先試 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 內最容易想到的角。取 $\theta = \frac{1}{3}\pi$，

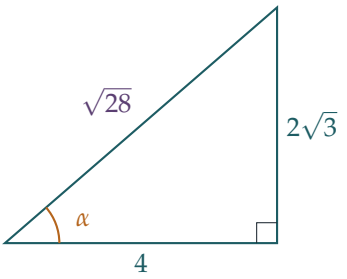
$$4\cos\tfrac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\,\sin\tfrac{\pi}{3} = 4\cdot\tfrac{1}{2} + 2\sqrt{3}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = 2 + 3 = 5,$$

所以 $\theta = \frac{1}{3}\pi$ 滿足方程，而且 $\frac{1}{4}\pi < \frac{1}{3}\pi < \frac{1}{2}\pi$。

現在把左方寫成 $R\cos(\theta - \alpha) = R\cos\theta\cos\alpha + R\sin\theta\sin\alpha$ 的形式。比較係數，

$$R\cos\alpha = 4, \qquad R\sin\alpha = 2\sqrt{3},$$

所以 $R^2 = 16 + 12 = 28$，得 $R = \sqrt{28}$，而 $\tan\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$。由於 $\cos\alpha$ 和 $\sin\alpha$ 皆為正數，我們可以取 α 為銳角，所以 $\alpha = \arctan(\sqrt{3}/2)$。



於是方程變成

$$\sqrt{28}\cos(\theta-\alpha)=5,\qquad \text{即}\qquad \cos(\theta-\alpha)=\frac{5}{\sqrt{28}},$$

而 $\theta=\frac{1}{3}\pi$ 滿足此方程。

想一想 我們可以立即斷定 $\frac{1}{3}\pi-\alpha=\arccos(5/\sqrt{28})$ 嗎？

還不可以：$\cos x=c$ 有很多個解，而 $\arccos c$ 只是其中位於 $[0,\pi]$ 的那一個。所以我們必須驗證 $\frac{1}{3}\pi-\alpha$ 位於 $[0,\pi]$ 之內。由於 tan 在 $(0,\frac{1}{2}\pi)$ 上是遞增的，而 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}$，故有 $0<\alpha<\frac{1}{3}\pi$。因此

$$0<\tfrac{1}{3}\pi-\alpha<\tfrac{1}{3}\pi\le\pi,$$

所以 $\frac{1}{3}\pi-\alpha=\arccos(5/\sqrt{28})$。移項後乘以 3，

$$\pi=3\arccos(5/\sqrt{28})+3\alpha=3\arccos(5/\sqrt{28})+3\arctan(\sqrt{3}/2),$$

這正是所要證明的結果。

第二個恆等式

沿用同一個想法：我們想得到 $\frac{1}{4}\pi=\arcsin(7\sqrt{2}/10)-\arctan(3/4)$，所以設 $\beta=\arctan(3/4)$，然後考慮 $\sin(\frac{1}{4}\pi+\beta)$。

由於 $0<\frac{3}{4}$，β 是銳角；再由 3–4–5 直角三角形，可得 $\sin\beta=\frac{3}{5}$ 及 $\cos\beta=\frac{4}{5}$。於是，根據複角公式（addition formula），

$$\begin{aligned}\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi+\beta\right)&=\sin\tfrac{\pi}{4}\cos\beta+\cos\tfrac{\pi}{4}\sin\beta\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right)=\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}.\end{aligned}$$

想一想 $\frac{1}{4}\pi+\beta$ 真的就是 arcsin 所給出的那個角嗎？

arcsin 的值域是 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$，所以我們需要 $\frac{1}{4}\pi + \beta$ 落在這個區間內。因為 $\tan\beta = \frac{3}{4} < 1 = \tan\frac{\pi}{4}$，而 tan 在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上是遞增的，故有 $0 < \beta < \frac{1}{4}\pi$，所以

$$\tfrac{1}{4}\pi < \tfrac{1}{4}\pi + \beta < \tfrac{1}{2}\pi.$$

因此 $\arcsin(7\sqrt{2}/10) = \frac{1}{4}\pi + \arctan(3/4)$，乘以 4 再移項，

$$\pi = 4\arcsin(7\sqrt{2}/10) - 4\arctan(3/4),$$

這就是所求的結果。

驗算

以數值計算，$\arctan(\sqrt{3}/2) \approx 0.713724$ 及 $\arccos(5/\sqrt{28}) \approx 0.333473$；兩者之和為 $1.047198 \approx \pi/3$，其三倍為 3.141593。至於第二個恆等式，$\arcsin(7\sqrt{2}/10) \approx 1.428899$ 及 $\arctan(3/4) \approx 0.643501$；兩者之差為 $0.785398 \approx \pi/4$。快速檢查一下亦可見，$\frac{1}{3}\pi$ 是方程在 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 內的唯一解：附近的另一個解 $\alpha - \arccos(5/\sqrt{28}) \approx 0.380$ 小於 $\frac{1}{4}\pi$。

常見錯誤

- 沒有驗證 $x \in [0, \pi]$ 就寫下 $\arccos(\cos x) = x$（或沒有驗證 $x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ 就寫下 $\arcsin(\sin x) = x$）。嚴謹性的分數正正就在這裏。
- 把 $\tan\alpha$ 上下顛倒：由 $R\cos\alpha = 4$、$R\sin\alpha = 2\sqrt{3}$ 得到的是 $\tan\alpha = 2\sqrt{3}/4$，而不是 $4/(2\sqrt{3})$。

STEP 之外

把 π 表示成反正切（inverse tangent）組合的恆等式，是梅欽類公式（Machin-type formulae）的基礎，例如 $\frac{1}{4}\pi = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$。由於 $\arctan x$ 的級數（series）在 x 很小時收斂（converge）得很快，這類公式曾被用來計算 π 至許多個位數。要看清這些恆等式，最簡潔的方法是透過複數（complex numbers）：$\arctan(b/a)$ 是 $a + b\mathrm{i}$ 的輻角（argument），所以反正切相加就對應於複數相乘。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）把這個幾何觀點闡述得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。