詳細解答

STEP II 2003，第 13 題

概率與統計 • 截尾泊松分佈

> **STEP II 2003，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q13

關鍵思路

這是一個剔除了 0 這個值的泊松分佈（Poisson distribution），餘下的概率按比例放大，使它們的總和仍然是 1。因此，我們需要的每一個和，都是缺了 $k = 0$ 一項的泊松和；而在計算平均值（mean）和方差（variance）時，$k = 0$ 一項本來就沒有任何貢獻。所以我們可以借用熟悉的泊松分佈結果 $\sum k\,p_k = \lambda$ 和 $\sum k^2 p_k = \lambda + \lambda^2$，然後乘以 A 就可以了。

解答

常數 A

記 $p_k = \dfrac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$ 為普通 $\mathrm{Po}(\lambda)$ 的概率。由於 $\sum_{k\ge 0} \lambda^k/k! = \mathrm{e}^{\lambda}$，

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \mathrm{e}^{-\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda} - 1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

概率 $\mathrm{P}(X = k) = A p_k$ 的總和必須是 1，所以 $A(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}) = 1$，即

$$A = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda})^{-1},$$

這正是題目要求的結果。留意當 $\lambda > 0$ 時 $0 < 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} < 1$，所以 $A > 1$：剩下來的概率 p_0 已經分攤給 $k \ge 1$ 的各個值。

平均值

$\sum k\,p_k$ 中 $k=0$ 的一項是零，所以

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k\,p_k = \lambda,$$

即 $\mathrm{Po}(\lambda)$ 的平均值。（直接計算：$\sum_{k\geq 1} k\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}/k! = \lambda \sum_{k\geq 1} \lambda^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda}/(k-1)! = \lambda$。）因此

$$\mu = \mathrm{E}(X) = A\lambda = \frac{\lambda}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}.$$

方差

同樣地，$\sum k^2 p_k$ 中 $k=0$ 的一項是零，而對於 $\mathrm{Po}(\lambda)$，我們有 $\mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{Var}(Y) + (\mathrm{E}\,Y)^2 = \lambda + \lambda^2$。如果你不想直接引用這個結果，可以寫 $k^2 = k(k-1)+k$：

$$\sum_{k\geq 2} k(k-1)\frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} = \lambda^2 \sum_{k\geq 2} \frac{\lambda^{k-2}\mathrm{e}^{-\lambda}}{(k-2)!} = \lambda^2, \qquad \text{所以} \qquad \sum_{k\geq 1} k^2 p_k = \lambda^2 + \lambda.$$

於是

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2) &= A\lambda(1+\lambda) = \mu(1+\lambda),\\ \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \mu^2 = \mu(1+\lambda) - \mu^2 = \mu(1-\mu+\lambda),\end{aligned}$$

這正是題目要求的結果。

不等式

想一想 嚴格不等式 $\mu < 1+\lambda$ 可以從哪裏來？

從方差而來。X 取 $1, 2, 3, \ldots$ 中每一個值的概率都是正數，所以它不是常數，而一個非常數的隨機變量（random variable）的方差必定嚴格大於零（因為 $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X-\mu)^2)$，而 $(X-\mu)^2 > 0$ 的概率是正數）。所以

$$\mu(1-\mu+\lambda) > 0.$$

由於 $\mu > 0$（它是一個取正值的隨機變量的平均值），我們可以兩邊除以 μ，得到 $1-\mu+\lambda > 0$，即 $\mu < 1+\lambda$。

至於下界，$\mu = A\lambda$，其中 $A > 1$ 而 $\lambda > 0$，所以 $\mu > \lambda$。兩者合起來，

$$\lambda < \mu < 1+\lambda.$$

$\lambda = 100$ 時的正態近似

e^{-100} 小得驚人（大約是 4×10^{-44}），所以在任何合理的準確度下

$$\mu = \frac{100}{1 - e^{-100}} \approx 100, \qquad \mathrm{Var}(X) = \mu(101 - \mu) \approx 100 \times 1 = 100.$$

所以我們用 $Y \sim N(100, 10^2)$ 來近似 X，這就是正態近似（normal approximation）。由於 X 只取整數值，我們要使用連續性校正（continuity correction）：事件 $X = 100$ 對應 $99.5 < Y < 100.5$。以 $Z = (Y - 100)/10$ 標準化，

$$\begin{aligned} P(X = 100) &\approx P(-0.05 < Z < 0.05) \\ &= 2\Phi(0.05) - 1 \\ &\approx 2(0.51994) - 1 = 0.0399, \end{aligned}$$

所以 $P(X = 100) \approx 0.04$（準確至小數點後 2 位）。

驗算

- 當 $\lambda \to 0$ 時，$\mu = \lambda/(1 - e^{-\lambda}) \to 1$，而方差 $\to 0$：幾乎所有概率都集中在 $k = 1$，這是理所當然的。這也與不等式 $\lambda < \mu < 1 + \lambda$ 把 μ 夾向 1 的情況吻合。
- 對許多隨機選取的 λ 以數值方法求級數的和，所得結果與 A、μ 和 $\mu(1 - \mu + \lambda)$ 一致，準確至機器精度。
- 當 $\lambda = 100$ 時，準確的概率是 $\dfrac{100^{100} e^{-100}}{100!\,(1 - e^{-100})} \approx 0.03986$，而正態近似給出 0.03988。兩者四捨五入後都是 0.04。

常見錯誤

- 忘記連續性校正，算出 $P(Y = 100) = 0$，或者未加解釋就使用密度函數的值。
- 只證明了 $\mu \leq 1 + \lambda$：要得到嚴格不等式，必須指出 X 不是常數。
- 除以 μ 時沒有說明 $\mu > 0$。

STEP 之外

X 服從零截尾泊松（zero-truncated Poisson）分佈，統計學家會在無法觀察到計數為零的情況下使用它（例如經過檢查站的汽車的乘載人數：沒有一輛車的乘載人數是零）。正態近似之所以行得通，是因為一個 Po(100) 變量是 100 個獨立的 Po(1) 變量之和，所

以中心極限定理（central limit theorem）適用；在這個尺度下，截尾的影響根本看不出來。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）講解了母函數（generating functions）和中心極限定理，它們正是這道題前後兩部分背後的理論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。