詳細解答

STEP II 2003，第 11 題

力學 • 拋體運動

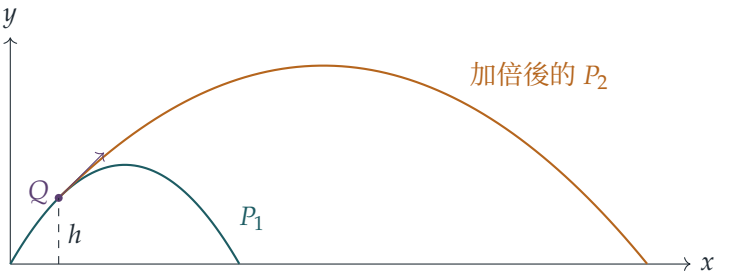
> **STEP II 2003，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q11

關鍵思路

把速度的水平分量和垂直分量分開處理。運動方向與水平線成 45°，正正就是兩個分量相等的時候，由此可直接求出第一個時刻。速率加倍時方向不變，所以兩個分量都加倍，而餘下的飛行過程就是一個從已知高度出發的新拋體問題。

解答

我們把每個質點（particle）都當作只受重力作用的點狀拋體（projectile），不計空氣阻力。記 $s = \sin\alpha$ 及 $c = \cos\alpha$。由於 $\alpha > 45°$，我們有 $s > c > 0$。



此草圖取 $\alpha = 60°$。兩個質點都沿青綠色的路徑運動至 Q，運動方向在該處首次與水平線成 45°。其後 P_2 沿琥珀色的路徑運動。

P_1 的飛行時間

在時間 t 的垂直位移（displacement）是 $y = Vs\,t - \frac{1}{2}gt^2 = t\left(Vs - \frac{1}{2}gt\right)$。它再次為零的時刻是

$$T_1 = \frac{2V\sin\alpha}{g}.$$

首個 45° 時刻

在時間 t，速度的分量（component）是

$$\dot{x} = Vc, \qquad \dot{y} = Vs - gt.$$

水平分量始終不變。發射時運動方向比 45° 更陡，因為 $\dot{y} = Vs > Vc = \dot{x}$。隨着 $\dot{y}$ 減小，當 $\dot{y} = \dot{x}$ 時，角度首次降至 45°，此時質點仍在上升：

$$Vs - gt_1 = Vc \quad\Longrightarrow\quad t_1 = \frac{V(s-c)}{g}.$$

（下降途中當 $\dot{y} = -Vc$ 時，運動方向會再次成 45°，但那是較後的事。）由於 $\frac{1}{2}T_1 = Vs/g$，

$$t_1 = \frac{Vs}{g}\left(1 - \frac{c}{s}\right) = \tfrac{1}{2}(1 - \cot\alpha)\,T_1,$$

正如所求。

P_2 的飛行

在時間 t_1 之前，P_2 的運動與 P_1 完全相同。在 t_1 時，速度的兩個分量都等於 Vc，而高度是

$$\begin{aligned} h &= Vs\,t_1 - \tfrac{1}{2}gt_1^2 = \frac{V^2}{g}\left[s(s-c) - \tfrac{1}{2}(s-c)^2\right] \\ &= \frac{V^2}{2g}(s-c)[2s - (s-c)] = \frac{V^2}{2g}(s^2 - c^2). \end{aligned}$$

由於 $s > c$，這是正數。

想一想 「速率加倍」對速度的每個分量有甚麼影響？

速率改變了，但方向不變，所以整個速度向量（velocity vector）乘以 2。兩個分量都變成 $2Vc$：質點從高度 h 出發，方向在水平線之上 45°，速率為 $2\sqrt{2}\,Vc$。

設 τ 為由速率加倍至 P_2 着地所經過的時間。以 Q 為起點、向上為正量度垂直位移，着地即位移為 $-h$：

$$2Vc\,\tau - \tfrac{1}{2}g\tau^2 = -\frac{V^2}{2g}(s^2 - c^2).$$

兩邊乘以 $-2/g$，並記 $\tau = (V/g)u$，其中 u 是無量綱（dimensionless）的量：

$$u^2 - 4cu - (s^2 - c^2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 2c \pm \sqrt{4c^2 + s^2 - c^2} = 2c \pm \sqrt{s^2 + 3c^2}.$$

兩根之積是 $-(s^2 - c^2) < 0$，所以其中一個根是負數。我們需要 $\tau > 0$，故取正號：

$$\tau = \frac{V}{g}\left(2c + \sqrt{s^2 + 3c^2}\right).$$

因此

$$T_2 = t_1 + \tau = \frac{V}{g}\left(s - c + 2c + \sqrt{s^2 + 3c^2}\right) = \frac{V}{g}\left(s + c + \sqrt{s^2 + 3c^2}\right).$$

除以 $\frac{1}{2}T_1 = Vs/g$，並利用 $\sqrt{s^2 + 3c^2}/s = \sqrt{1 + 3c^2/s^2}$（因 $s > 0$ 而成立）：

$$\frac{2T_2}{T_1} = \frac{s + c + \sqrt{s^2 + 3c^2}}{s} = 1 + \cot\alpha + \sqrt{1 + 3\cot^2\alpha},$$

這就是所要求的結果。

驗算

- 當 $\alpha \to 90^\circ$ 時，$\cot\alpha \to 0$，比值趨向 2。這合乎常理：45° 時刻此時就是飛行的最高點，該處速率為零，所以加倍毫無作用，$T_2 = T_1$。
- 當 $\alpha = 45^\circ$（邊界情況）時，加倍在發射一刻發生，所以 P_2 其實就是以 $2V$ 拋出，而 $T_2 = 2T_1$。公式給出 $1 + 1 + 2 = 4$，兩者吻合。
- 當 $\alpha = 60^\circ$ 時，$t_1/T_1 = \frac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{3}) \approx 0.2113$，而 $2T_2/T_1 = 1 + 1/\sqrt{3} + \sqrt{2} \approx 2.9916$。對 P_2 的飛行以數值方法逐步模擬，隨機選取 2000 組 α 和 V，結果均與 T_2 的公式相符。

常見錯誤

- 只把垂直分量加倍，或只把水平分量加倍。方向不變，所以兩個分量都加倍。
- 讓 P_2 從地面重新開始運動，而不是從高度 h 開始。
- 沒有檢查正負號就取了 τ 的負根。

STEP 之外

速度的瞬時改變是一個衝量（impulse）：一個極大的力作用了極短的時間。大學一年級的力學正是用衝量來處理碰撞、火箭點火和踢球等情況。把一條軌跡分成若干段，各段

之間以衝量相接，正是規劃軌道機動（orbital manoeuvre）的方法：引擎短暫點火，就能把太空船從一條圓錐曲線（conic）軌道轉移到另一條。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對衝量和動量（momentum）有嚴謹的闡述，並收錄了許多這類題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。