詳細解答

STEP II 2003，第 10 題

力學 • 涉及摩擦力的約束運動

STEP II 2003，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/03-s2-q10

關鍵思路

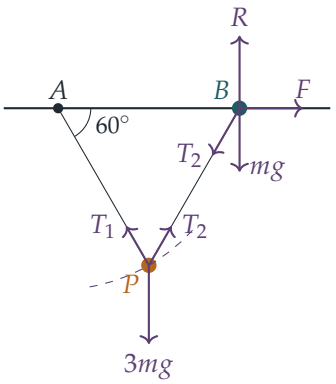
開始時，$AP = PB = AB = \ell$，所以 APB 是等邊三角形（equilateral triangle）。由於 AP 一直拉緊，P 沿着以 A 為圓心的圓運動。整個系統由靜止開始，所以沒有向心（centripetal）項，P 的初始加速度（acceleration）必定沿着該圓的切線（tangent）方向，這就確定了它的方向。其次，P 始終位於以 AB 為底的等腰三角形（isosceles triangle）的頂點，所以 P 的水平位置永遠是 B 的一半。至於最後一部分，分別對 B 和 P 寫出牛頓第二定律（Newton's second law）。對 P 沿其加速度方向（垂直於 AP）分解，AP 中的張力（tension）便完全不會出現。

解答

我們把 B 和 P 視為質點（particle），並把繩視為輕而不可伸長（light and inextensible）。繩的兩半都保持拉緊。取 A 為原點，金屬線沿 x 軸，B 最初位於 $(\ell, 0)$。設 θ 為角 PAB。由於 $AP = PB = \ell$，

$$B = (2\ell\cos\theta,\, 0), \qquad P = (\ell\cos\theta,\, -\ell\sin\theta),$$

而開始時 $\theta = \frac{\pi}{3}$。



P 的加速度方向

由於 $AP = \ell$ 固定不變，P 沿着以 A 為圓心、半徑為 ℓ 的圓運動（圖中以虛線表示）。圓上一點的加速度有一個指向圓心的分量 $\ell\dot{\theta}^2$，以及一個沿切線的分量 $\ell\ddot{\theta}$。開始時 $\dot{\theta} = 0$，因為系統是由靜止釋放的。所以 P 的初始加速度沿着切線方向，即垂直於 AP。

AP 與水平線成 $60°$ 角，所以 AP 的垂直線與水平線成 $30°$ 角。若加速度的大小為 a，則

$$a_1 = a\cos 30° = \tfrac{\sqrt{3}}{2}a, \qquad a_2 = a\sin 30° = \tfrac{1}{2}a,$$

因此 $a_1 = \sqrt{3}\,a_2$，正如所求。

以 θ 表示：對 P 的位置求導，並令 $\dot{\theta} = 0$，可得初始加速度為 $\ell\ddot{\theta}(-\sin\theta, -\cos\theta)$。當 $\ddot{\theta} > 0$ 時，P 向下並朝 A 的方向運動。其大小為 $a = \ell\ddot{\theta}$。

B 的加速度

B 的 x 坐標永遠恰好是 P 的兩倍，因為 P 位於 AB 的垂直平分線（perpendicular bisector）上。求導兩次可知，B 的加速度永遠是 P 的水平加速度的兩倍。所以 B 的初始加速度大小為 $2a_1$，方向指向 A，正如所求。

想一想 為甚麼可以說 B 朝 A 移動？摩擦力又朝哪個方向作用？

P 下落時，θ 增大，所以 $x_B = 2\ell\cos\theta$ 減小。因此 B 朝 A 滑動，而作用於 B 的摩擦力（friction）則背離 A（沿正 x 方向）。這裏我們假設 B 確實會移動。題目給出摩擦力為 $\frac{\sqrt{3}}{6}R$，這正是滑動時的數值，從而確認了這一點。

初始加速度的大小

設 T_1 和 T_2 分別為 AP 和 PB 中的張力。設 R 為作用於 B 的法向反作用力（normal reaction），$F = \frac{\sqrt{3}}{6}R$ 為摩擦力。以 a 表示 P 的初始加速度的大小，故 $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$，而 B

的加速度為 $2a_1 = \sqrt{3}\,a$，方向指向 A。

珠子 B。繩 BP 以水平線以下 60° 的方向把 B 拉向 A 的一方。B 沒有垂直方向的加速度，所以沿垂直方向分解可得

$$R = mg + \tfrac{\sqrt{3}}{2}T_2.$$

沿水平方向分解，取指向 A 的方向為正：

$$m(\sqrt{3}\,a) = \tfrac{1}{2}T_2 - \tfrac{\sqrt{3}}{6}\left(mg + \tfrac{\sqrt{3}}{2}T_2\right) = \tfrac{1}{4}T_2 - \tfrac{\sqrt{3}}{6}mg,$$

所以

$$T_2 = 4\sqrt{3}\,ma + \tfrac{2\sqrt{3}}{3}mg. \tag{1}$$

質點 P。沿 P 的加速度方向分解，即向下並朝向 A、在水平線以下 30° 的方向。這個方向垂直於 AP，所以 T_1 沒有任何貢獻。重量 $3mg$ 與這個方向成 60° 角，所以它的貢獻是 $3mg\cos 60^\circ = \tfrac{3}{2}mg$。張力 T_2 沿 PB 作用，即向上並背離 A、在水平線以上 60° 的方向。它與加速度方向成 150° 角，所以它的貢獻是 $T_2\cos 150^\circ = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}T_2$。因此

$$3ma = \tfrac{3}{2}mg - \tfrac{\sqrt{3}}{2}T_2. \tag{2}$$

把 (1) 代入 (2)：

$$3ma = \tfrac{3}{2}mg - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(4\sqrt{3}\,ma + \tfrac{2\sqrt{3}}{3}mg\right) = \tfrac{3}{2}mg - 6ma - mg,$$

$$9ma = \tfrac{1}{2}mg,$$

所以 P 的初始加速度的大小為

$$a = \frac{g}{18},$$

正如所求。

這個答案前後一致：由 (1) 得 $T_2 = \tfrac{8\sqrt{3}}{9}mg > 0$，所以繩 PB 是拉緊的。於是 $R = \tfrac{7}{3}mg > 0$。對 P 沿水平方向分解，得 $T_1 = T_2 + 6ma_1 = \tfrac{19\sqrt{3}}{18}mg > 0$，所以 AP 也是拉緊的。

驗算

- P 的垂直方向方程，我們之前沒有用到：$\tfrac{\sqrt{3}}{2}(T_1 + T_2) - 3mg = \tfrac{35}{12}mg - 3mg = -\tfrac{1}{12}mg$。這等於 $-3ma_2 = -3m\cdot\tfrac{g}{36}$，與預期相符。
- 數值上，我們對 B 和 P 的位置求導，得到 $a_1/a_2 \approx 1.7320508$ 及 $a_B/a_1 = 2$。然後取 $g = 9.81$，從三條力的方程解出 T_1、T_2 和 $\ddot{\theta}$。結果是 $|a| = 0.545 = g/18$，並有 $T_2/mg \approx 1.5396$ 及 $R/mg \approx 2.3333$。
- 若沒有摩擦力，(1) 會變成 $T_2 = 2\sqrt{3}\,ma$，而 (2) 會給出 $6ma = \tfrac{3}{2}mg$，所以 $a = g/4$。摩擦力理應令運動減慢，而的確 $g/18 < g/4$。

常見錯誤

- 加入了向心項。在釋放的一刻 $\dot{\theta} = 0$，所以加速度純粹沿切線方向。
- 忘記了 T_2 會把 B 向下拉，令 R 增大，摩擦力亦隨之增大。取 $R = mg$ 會得出錯誤答案。
- 對 P 沿水平和垂直方向分解。這樣做是可行的，但會引入 T_1，並需要多一條方程。沿垂直於 AP 的方向分解便可把它消去。

STEP 之外

這是一個只有一個自由度（degree of freedom）的約束系統（constrained system）：一切都由單一個角 θ 決定。把位置以 θ 表示然後求導，正是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）的第一步。在拉格朗日力學中，像 T_1 這類約束力（constraint force）是以有系統的方法消去的，而不是靠巧妙地選擇方向。摩擦力並不能妥貼地納入這個框架，這也是這類題目適合用來練習牛頓力學方法的原因之一。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對約束運動和非勻速圓周運動（non-uniform circular motion）有細緻的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。