詳細解答

STEP II 2003，第 1 題

純數學 • 聯立線性方程

> **STEP II 2003，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q1

關鍵思路

未知數 x 只以 ax 的形式出現，而 y 在每條方程中的係數都是 -1。因此，把相鄰的方程相減，就可以完全消去 y，而且所得的兩個差式左邊相同。這樣一來，方程組只在 b 取某一個值時才相容（consistent）；一旦相容，就有一個自由參數（free parameter）。題目餘下的部分，就是看怎樣好好選取這個參數。

解答

把三條方程編號為 (1)、(2)、(3)。從 (2) 減去 (1)，再從 (3) 減去 (2)，得

$$ax - 2z = 4, \tag{A}$$
$$ax - 2z = b - 7. \tag{B}$$

方程組的任何解都同時滿足 (A) 和 (B)，所以只有當 $4 = b - 7$，即 $b = 11$ 時，才可能有解。這一點對 a 的每一個值都成立。

第 (i) 部分

當 $a = 0$ 時，方程變成 $-y - z = 3$、$-y - 3z = 7$、$-y - 5z = b$，x 完全沒有出現。

若方程組有解，則由上面的說明可知 $b = 11$。

反過來，假設 $b = 11$。此時方程 (A) 變成 $-2z = 4$，所以 $z = -2$，再由 (1) 得 $y = -3 - z = -1$。以 $y = -1$、$z = -2$ 驗算全部三條方程：

$$1 + 2 = 3, \qquad 1 + 6 = 7, \qquad 1 + 10 = 11 = b,$$

所以（不論 x 取甚麼值）我們都得到一個解。因此，方程組有解若且唯若（if and only if）$b = 11$。

第 (ii) 部分

現在 $a \neq 0$ 而 $b = 11$。設 $z = \lambda$。由方程 (A) 得 $ax = 4 + 2\lambda$，而由於 $a \neq 0$，我們可以兩邊相除：

$$x = \frac{4 + 2\lambda}{a}.$$

然後由 (1) 得 $y = ax - z - 3 = 4 + 2\lambda - \lambda - 3 = 1 + \lambda$。

我們只用了 (1) 和 (2) 來求出這些值，所以還必須驗證它們也滿足 (3)：

$$3ax - y - 5z = 3(4 + 2\lambda) - (1 + \lambda) - 5\lambda = 12 + 6\lambda - 1 - 6\lambda = 11 = b.$$

所以對每一個數 λ，

$$x = \frac{4 + 2\lambda}{a}, \qquad y = 1 + \lambda, \qquad z = \lambda$$

都是一個滿足 $z = \lambda$ 的解，正如題目所求。（事實上，這些就是全部的解：任何解的 z 都有某個值 λ，而上面的推導隨即確定了 x 和 y。）

? **想一想** 為甚麼我們要另外驗證方程 (3)？

我們用了 (1) 和 (2)（以 (1) 和 (A) 的形式）來求 x 和 y。三條含三個未知數的方程不一定會自動互相吻合，而 (3) 正是 b 出場的地方。$b = 11$ 就是在這一步驗證中用上的。

第 (iii) 部分

當 $a = 2$ 時，由第 (ii) 部分可知所有解都是 $(x, y, z) = (2 + \lambda,\ 1 + \lambda,\ \lambda)$。於是

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (2 + \lambda)^2 + (1 + \lambda)^2 + \lambda^2 \\ &= 3\lambda^2 + 6\lambda + 5 \\ &= 3(\lambda + 1)^2 + 2, \end{aligned}$$

它恰好在 $\lambda = -1$ 時取得最小值 2。所以所求的解是

$$x = 1, \qquad y = 0, \qquad z = -1.$$

從幾何角度看，所有解構成一條方向為 $(1, 1, 1)$ 的直線，而我們要找的是直線上最接近原點的一點。事實上 $(1, 0, -1) \cdot (1, 1, 1) = 0$，所以位置向量（position vector）與直線垂直（perpendicular），正如所料。

第 (iv) 部分

根據開首的說明，b 必須是 11。若 $a = 0$，由第 (i) 部分必有 $y = -1$、$z = -2$，於是 $y^2 + z^2 = 5$，太大了。所以 $a \neq 0$，而由第 (ii) 部分，解為 $x = (4 + 2\lambda)/a$、$y = 1 + \lambda$、$z = \lambda$。

> **想一想** x 怎樣才可以非常大，而 y 和 z 卻保持很小？

a 唯一出現的地方是 $x = (4 + 2\lambda)/a$。選定 λ 就確定了 y 和 z，然後只要 a 足夠小，x 就可以要多大有多大。

我們需要 $y^2 + z^2 = (1 + \lambda)^2 + \lambda^2 = 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 < 1$，即 $2\lambda(\lambda + 1) < 0$，即 $-1 < \lambda < 0$。取 $\lambda = -\frac{1}{2}$：此時 $y = \frac{1}{2}$、$z = -\frac{1}{2}$ 而 $y^2 + z^2 = \frac{1}{2} < 1$，同時 $x = 3/a$。選取

$$a = 10^{-6}$$

便得 $x = 3 \times 10^6 > 10^6$。所以 $a = 10^{-6}$（連同 $b = 11$）符合要求。

更一般地說，當 $-1 < \lambda < 0$ 時，我們有 $2 < 4 + 2\lambda < 4$，所以恰好在 $0 < a < 4 \times 10^{-6}$ 時才存在合適的解。負的 a 不可行，因為那時 $x < 0$。

驗算

- 把 $a = 2$、$(x, y, z) = (1, 0, -1)$ 代入原來的方程：$2 - 0 + 1 = 3$、$4 - 0 + 3 = 7$、$6 - 0 + 5 = 11$。
- 對於第 (iv) 部分，取 $a = 10^{-6}$ 和 $(x, y, z) = (3 \times 10^6, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$：$3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$、$6 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 7$、$9 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 11$。
- 我們用精確分數驗證過，對數百組隨機選取的 a 和 λ，第 (ii) 部分的公式都滿足全部三條方程；另外，對 λ 作網格搜尋，也確認了第 (iii) 部分的最小值 2 在 $\lambda = -1$ 時取得。

常見錯誤

- 由其中兩條方程求出 x 和 y 後，忘記驗證第三條。
- 在第 (iv) 部分，以為 y 和 z「不可能同時很小」，就斷定題目所求不可能做到。其實是可以的：$y - z = 1$ 只能推出 $y^2 + z^2 \geq \frac{1}{2}$。

STEP 之外

這是對線性代數（linear algebra）中秩（rank）與相容性的初步認識。這裏的係數矩陣（coefficient matrix）是奇異（singular）的（它的各行滿足 $r_1 - 2r_2 + r_3 = 0$），所以方程組要麼無解，要麼有一整條直線的解，視乎右邊的常數項是否滿足同一個關係。第 (iv) 部分也說明了為甚麼接近奇異的方程組在數值計算中很危險：一個極小的係數 a 會產生一個極大的解。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門教材）涵蓋了以上所有內容，包括像第 (iii) 部分那樣的最小範數解（least-norm solution）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。